Кафедра прикладных информационных технологий ИОН РАНХиГС

"Материалы по математике для Liberal Arts. Часть 1"

Составитель: Ю.А. Фарков, 2017

---

1. Операции над множествами

Понятие множества относится к числу исходных, основных понятий математики. Множество обычно представляют как объект, образованный за счет мысленного собирания в единое целое каких-либо предметов, в том числе, возможно, и самих множеств.

Множества обозначают прописными буквами $A, B, \ldots$. Множество A задано, если известно, из каких элементов (предметов) оно состоит. *Пустое множество* не содержит ни одного элемента и обозначается $\emptyset$.

Два основных способа задания множества: 1) перечисление элементов, 2) указание характеристического свойства. Если множество A состоит из элементов a, b, c, то пишут $A = \{a, b, c\}$. Если множество A состоит из элементов x, обладающих свойством $P(x)$, то пишут $A = \{x : P(x)\}$. Например, если $P(x)$ обозначает выражение "x – целое число, для которого число 2 является делителем", то $A = \{x : P(x)\}$ будет множеством четных чисел.

Множество может быть задано алгоритмически – некоторым конструктивным процессом (алгоритмом), порождающим из одних элементов множества другие его элементы. Например, множество всех натуральных чисел получается из числа 1 процедурой присоединения 1 к ранее уже построенному числу.

Обозначения:

$x \in A$ – элемент x принадлежит множеству A,

$x \notin A$ – элемент x не принадлежит множеству A,

$A \subset B$ – множество A является *подмножеством* множества B (каждый элемент можества A является элементом множества B),

$A \cup B$ – *объединение* множеств A и B ($x \in A \cup B$, если $x \in A$ или $x \in B$),

$A \cap B$ – *пересечение* множеств A и B ($x \in A \cap B$, если $x \in A$ и $x \in B$),

$A \setminus B$ – *разность* множеств A и B ($x \in A \setminus B$, если $x \in A$ и $x \notin B$).

Симметрическая разность множеств A и B обозначается $A \triangle B$ и определяется равенством $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Из определений следует, что

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Свойства операций объединения и пересечения:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A \quad \text{(коммутативность)},$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad \text{(ассоциативность)},$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{(дистрибутивность)}.$$

Если U – универсальное множество, то разность $U \setminus A$ называется *дополнением* множества A и обозначается $\overline{A}$. *Законы де Моргана*[1] для множеств:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{(дополнение пересечения равно объединению дополнений)},$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{(дополнение объединения равно пересечению дополнений)}.$$

Пустое множество $\emptyset$ считается подмножеством любого множества. Каждое множество A являтся подмножеством самого себя: $A \subset A$. Если множество A состоит из n элементов, то оно имеет 2^n подмножеств.

Декартово произведение[2] множеств A и B обозначается $A \times B$ и состоит из всех упорядоченных пар (x, y) таких, что $x \in A$ и $y \in B$. Иначе говоря,

$$A \times B = \{(x, y) \;:\; x \in A,\, y \in B\}.$$

Множество $A \times A$ обозначают A^2 и называют *декартовым квадратом* множества A. Аналогично определяется степень A^n для любого натурального n.

Упражнения.

1. Проиллюстрируйте операции объединения, пересечения, разности и симметрической разности множеств диаграммами Эйлера-Венна.

2. Для множеств $A = \{1, \alpha, *\}$, $B = \{1, \beta, \square\}$ и $C = \{1, \square\}$ найдите

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad B \cap A, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A, \quad A \triangle B, \quad B \setminus C, \quad C \setminus B.$$

Верно ли, что $C \subset B$?

3. Для множеств $A = \{2, 4, 6\}$ и $B = \{4, 5\}$ найдите

$$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A \setminus B, \quad B \setminus A, \quad A \triangle B, \quad A \times B, \quad B \times A.$$

Сколько всего подмножеств имеют множества A и B? Укажите эти подмножества.

4. На координатной плоскости Oxy укажите множества

$$A = \{(x, y) \;:\; y = x\}, \quad B = \{(x, y) \;:\; y = x^2\}, \quad C = \{(x, y) \;:\; x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

и постройте множества

$$A \cup C, \quad A \cap B, \quad A \cap C, \quad A \cup C, \quad B \cap C, \quad C \setminus A, \quad A \triangle C.$$

[1] Морган де Огастес (Августус) (1806-1871) – шотландский математик и логик, первый президент Лондонского математического общества. В 1847 г. вышло его сочинение «Формальная логика».

[2] Рене Декарт (1596-1650) – французский математик и философ, один из создателей аналитической геометрии.

5. Для множеств $X = [0,3]$ и $Y = (1,5]$ найдите

$$X \cup Y, \quad X \cap Y, \quad X \setminus Y, \quad Y \setminus X, \quad X \triangle Y, \quad X \times Y, \quad Y \times X.$$

Изобразите множества $X \times Y$ и $Y \times X$ на координатной плоскости Oxy.

6. Для множеств A, B и C из упражнения 1 проверьте равенства

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

7. Как выглядит декартово произведение: 1) окружности и прямой; 2) окружности и окружности?

2. Понятия графика функции и бинарного отношения

С помощью декартова произведения вводятся понятия графика функции и бинарного отношения. *Графиком функции* f, заданной на множестве A и принимающей значения в B, называют множество

$$\Gamma(f) = \{(x,y) \in A \times B \,:\, y = f(x)\}.$$

Множество $M \subset A \times B$ является графиком некоторой функции f, заданной на множестве A и принимающей значения в B, тогда и только тогда, когда для *каждого* элемента $x \in A$ существует *единственный* элемент $y \in B$, для которого $y = f(x)$. Функция f определена, если известен ее график $\Gamma(f)$.

Всякое непустое подмножество R декартова квадрата $A^2 = A \times A$ задает *бинарное отношение* на множестве A. Если $(x,y) \in R$, то говорят, что элементы x и y находятся в отношениии R и пишут xRy. Аналогично определяются трехместные и n-местные отношения на множестве A.

Бинарное отношение R на множестве A называется *отношением эквивалентности*, если для любых $x, y, z \in A$ выполнены свойства:

1) xRx (*рефлексивность*);

2) из xRy следует yRx (*симметричность*);

3) из xRy и yRz следует xRz (*транзитивность*).

Пусть на множестве A задано отношение эквивалентности R. Тогда для каждого $a \in A$ определено множество

$$[a]_R = \{x \in A \,:\, xRa\},$$

называемое *классом эквивалентности* элемента a. Различные классы эквивалентности не пересекаются, а их объединение совпадает с множеством A. Иначе говоря, отношение эквивалентности R задает разбиение множества A на попарно непересекающиеся классы эквивалентности. Обратно, *всякое* разбиение данного множества

A на попарно непересекающиеся подмножества определяет между элементами этого множества некоторое отношение эквивалентности (см., например, [8, § 2]).

Бинарное отношениии R на множестве A называется *отношением частичного порядка*, если для любых $x, y, z \in A$ выполнены свойства:

1) xRx (*рефлексивность*);
2) из xRy и yRx следует $x = y$ (*антисимметричность*);
3) из xRy и yRz следует xRz (*транзитивность*).

Множество, на котором задано отношение частичного порядка, называется *частично упорядоченым.*

Упражнения.

1. Приведите примеры графиков нескольких известных вам функций.

2. На плоскости Oxy постройте графики нескольких функций, заданных на множестве $A = \{2, 4, 6\}$ и и принимающих значения в множестве $B = \{4, 5\}$

3. Пусть на множестве $A = \{24, 27, 28, 46, 49, 63, 70, 85\}$ бинарное отношение R определено условием: xRy, если $x \neq y$ и числа x, y имеют общий делитель, больший 1. Сколько всего неупорядоченных пар $\{x, y\}$, элементы которых находятся в отношении R?

4. Пусть на множестве $M = \{3, 4, 5, 6, 10, 16, 24, 25, 30\}$ трехместное отношение S задано условием: $(x, y, z) \in S$, если $x = y \cdot z$. Сколько всего троек (x, y, z), элементы которых находятся в отношении S?

5. Приведите примеры отношений эквивалентности a) на множестве студентов, b) на множестве целых чисел, c) на множестве геометрических фигур.

6. Приведите примеры частично упорядоченных множеств.

3. Правила сложения и умножения

Обозначение: $|A|$ – число элементов конечного множества A.

Если множества A и B не имеют ни одного общего элемента (т.е. $A \cap B = \emptyset$), то говорят, что множества A и B не пересекаются.

Правило сложения. *Число элементов множества $A \cup B$ находится по формуле*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

В частности, если множества A и B не пересекаются, то

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Правило умножения. *Если элемент x можно выбрать m способами, а элемент y можно выбрать n способами, то упорядоченую пару (x, y) можно выбрать $m \cdot n$ способами. Иначе говоря, для любых конечных множеств A и B верна формула*

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Правила сложения и умножения распространяются на случай трех и более множеств. Например,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|,$$

$$|A \times B \times C| = |A| \cdot |B| \cdot |C|, \quad |A^n| = |A|^n.$$

Упражнения.

1. Лекцию по информатике слушали 20 студентов, а лекцию по математике – 30. Сколько студентов посетили указанные лекции, если они происходили в одно и то же время в разных аудиториях?

2. В группе 14 студентов. Из них 9 посещают занятия по английскому языку, 7 – по немецкому языку и 3 студента посещают занятия и по-немецкому, и по-английскому. Есть ли в группе студент, не посещающий занятия по указанным двум дисциплинам?

3. Имеется 5 различных конвертов и 6 различных марок. Сколькими способами можно отправить письмо в конверте с маркой?

4. Для установки кода входной двери выбирают три различные цифры от 0 до 9. Сколько всего существует вариантов?

5. Пусть $I = \{0, 1\}$ – множество, состоящее из 0 и 1. Укажите все элементы множеств I^2 и I^3. Сколько элементов содержит множество I^n?

6. Функции, заданные на множестве I^n и принимающие значения 0 и 1, называют *булевыми функциями* n переменных[3]. Приведите примеры булевых функций двух переменных.

7. Сколько элементов содержит степень A^n, если множество A состоит из m элементов?

4. Размещения, перестановки и сочетания

Из трех элементов a, b, c можно составить 6 упорядоченных множеств по 2 элемента в каждом:

$$(a, b), \quad (a, c), \quad (b, c), \quad (b, a), \quad (c, a), \quad (c, b).$$

Число различных вариантов выбора (с учетом порядка) k элементов из n элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равно

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1).$$

Действительно, есть n способов выбрать один элемент, т.е. $A_n^1 = n$. На каждый выбор первого элемента существует $n - 1$ способов выбора второго (из оставшихся $n - 1$

[3]Джордж Буль (1815-1864) – английский математик и логик. В 1854 г. опубликован его трактат «Исследование законов мышления, на которых основываются математические теории логики и вероятностей». Об алгебрах Буля см., например, в [15, с.265]

элементов), поэтому $A_n^2 = n(n-1)$. И так далее. Таким образом, из элементов данного n-элементного множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ можно образовать всего A_n^k упорядоченных подмножеств по k элементов в каждом (такие подмножеста называют *размещениями* из n элементов по k).

Произведение первых n натуральных чисел $1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$ обозначают $n!$ (читается: "n-факториал"). По определению полагают $0! = 1! = 1$. Таким образом, для всех натуральных n верно равенство $n! = (n-1)!\, n$.

Перестановки получаются при размещении всех элементов данного множества. Например, перестановками множества $\{a, b, c\}$ являются упорядоченные множества

$$(a, b, c), \quad (a, c, b), \quad (b, a, c), \quad (b, c, a), \quad (c, a, b), \quad (c, b, a)$$

(всего $3! = 6$ перестановок). Число всевозможных перестановок элементов данного n-элементного множества обозначают P_n и вычисляют по формуле

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n = n!.$$

Видно, что $P_n = A_n^n$.

Число различных k-элементных подмножеств данного n-элементного множества называют *числом сочетаний из n элементов по k* и обозначают C_n^k.

Из каждого k-элементного подмножества данного n-элементного множества можно получить $k!$ перестановок. Отсюда следует, что $C_n^k \cdot k! = A_n^k$. Поскольку $A_n^k = n!/(n-k)!$, то верна формула

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Числа C_n^k являются коэффициентами *формулы бинома Ньютона*:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Поэтому числа C_n^k часто называют *биномиальными коэффициентами.* Из формулы бинома Ньютона при $a = b = 1$ получается равенство

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n,$$

из которого следует, что произвольное n-элементное множество имеет 2^n подмножеств.

Упражнения.

1. Студенты одной группы должны сдать 4 экзамена в течение 16 дней. Сколькими способами можно составить расписание экзаменов, если в один день разрешается сдавать не более одного экзамена?

2. Сколькими способами можно из 10 различных цветков составить букет из 5 цветков?

3. Сколько различных натуральных чисел можно составить из цифр 1,3,5,7,9 если в записи числа каждая из цифр используется не более одного раза?

4. Для участия в соревнованиях тренер отбирает 6 спортсменов из пятнадцати. Сколькими способами он может составить команду?

5. Как методами геометрической алгебры в Древней Греции[4] выводились тождества

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b), \quad a(b+c+d) = ab + ac + ad\,?$$

6. С помощью формул

$$C_n^0 = C_n^n = 1, \quad C_n^k = C_n^{n-k}, \quad C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

составьте таблицу значений биномиальных коэффициентов C_n^k для $n = 1, 2, \ldots, 6$.

7. Неупорядоченные наборы с повторяющимися элементами называют *сочетаниями с повторениями*. Убедитесь на примерах, что число сочетаний с повторениями из n элементов по k равно C_{n+k-1}^k.

5. Числовые множества

Множество натуральных, т.е. целых положительных чисел, обозначается $\mathbb{N}$. Натуральные числа появились при счете предметов:

$$1, \quad 2 = 1+1, \quad 3 = 2+1, \quad 4 = 3+1, \quad 5 = 4+1, \quad 6 = 5+1, \ldots.$$

На практике в каком из двух данных множеств элементов больше часто узнают без вычислений (например, если в аудитории есть свободные стулья, то студентов меньше, чем стульев).

Натуральное число называется *простым*, если оно делится без остатка только на само себя и на единицу. *Близнецами* называются такие два простых числа, разность между которыми равна двум, например, 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, 29 и 31. Неизвестно, конечным или бесконечным является количество близнецовых пар; в требовании дать ответ на этот вопрос состоит не решенная до сих пор *проблема близнецов*.

[4]См. очерк "Наглядная математика" в книге М.Л. Гаспарова [4]. Основы геометрической алгебры были изложены во II книге "Начал" Евклида, ее предложения встречаются также в книгах VI и XIII.

Бесконечность множества простых чисел доказана в IX книге "Начал" Евклида (около 300 г. до н.э.). Вот это доказательство.

Предположим, что конечное множество $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ содержит все простые числа. Рассмотрим число n, полученное путем перемножения всех чисел этого множества и добавления единицы, т.е. число $n = p_1 p_2 \dots p_r + 1$. Это число n имеет простой делитель p, который не совпадает ни с одним из чисел $p_1, p_2, \dots, p_r$. Действительно, в противном случае p был бы делителем и числа n и произведения $p_1 p_2 \dots p_r$ и, следовательно, разности $n - p_1 p_2 \dots p_r = 1$, что невозможно. Получено противоречие. Поэтому *множество простых чисел бесконечно*[5].

Задачи измерения (например, длин дорог) привели к возникновению дробей, а практика финансовых отношений привела к появлению отрицательных чисел и нуля.[6] Обозначения множеств целых и рациональных чисел:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{Q} = \{m/n \,:\, m \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

Арифметические операции на множестве $\mathbb{Q}$ определяются по формулам:

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml + kn}{nl}, \qquad \frac{m}{n} \cdot \frac{k}{l} = \frac{mk}{nl},$$
$$\frac{m}{n} - \frac{k}{l} = \frac{ml - kn}{nl}, \qquad \frac{m}{n} : \frac{k}{l} = \frac{ml}{nk}.$$

Множество действительных чисел обозначают $\mathbb{R}$. Между множеством $\mathbb{R}$ и множеством точек прямой существует взаимно однозначное соответствие (иначе говоря, существует отображение множества $\mathbb{R}$ на прямую, при котором каждому действительному числу соответствует ровно одна точка на прямой и, обратно, каждой точке прямой соответствует ровно одно действительное число). Поэтому геометрически множество $\mathbb{R}$ изображают в виде *числовой оси* – прямой, на которой выбраны начало отсчета, положительное направление и масштаб.

Арифметические операции над действительными числами обладают свойствами:

$$a + b = b + a, \quad ab = ba \quad \text{(коммутативность)},$$

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc) \quad \text{(ассоциативность)},$$

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{(дистрибутивность умножения относительно сложения)}.$$

Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ верно одно из трех соотношений: $a = b$, $a < b$ или $a > b$.
Если $a < b$, то определены числовые промежутки:

$$(a, b\,) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}, \quad (a, b\,] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \leqslant b\},$$

[5]Построенное при доказательстве число n необязательно простое. Известно, например, что число $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1$ составное.

[6]Студентам, интересующимся возникновением чисел, рекомендуются книги [2], [10] и [12].

$$[a,b\,) = \{x \in \mathbb{R}\,:\; a \leqslant x < b\}, \quad [a,b\,] = \{x \in \mathbb{R}\,:\; a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Произвольное число $a \in [n, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, в позиционной системе с основанием 10 представимо[7] в виде

$$a = \alpha_n \cdot 10^n + \alpha_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + \alpha_0 \cdot 10^0 + \alpha_{-1} \cdot 10^{-1} + \alpha_{-2} \cdot 10^{-2} + \dots, \quad \alpha_n \neq 0,$$

где α_i- цифры числа a, $\alpha_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Например, равенство $a = 437,9503$ означает, что

$$a = 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 9 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4}.$$

Числа, поступающие в компьютер, переводятся в двоичную систему счисления (т.е в позиционную систему с основанием 2).

Упражнения.

1. Вычислите сумму и произведение чисел 1.125 и 2/7. Найдите длину гипотенузы по катетам 1/3 и 0.25. Ответы запишите в виде обыкновенной дроби и десятичной дроби с точностью до 10^{-3}.

2. *В древневавилонской таблице Сенкере*[8] помещены квадраты чисел от 1 до 60 в шестидесятеричной системе. Так, например, 1.21 - квадрат 9, 2.1 - квадрат 11, 2.49 - квадрат 13. Напишите в шестидесятеричной системе квадраты чисел 21, 22 и 25.

3. В одной из древневавилонских табличек сформулирован вопрос: "За какое время удвоится сумма денег, ссуженная под двадцать процентов годовых?" Найдите правильный ответ на этот вопрос.

4. *Две задачи из египетских папирусов:*

1) Разделите сто хлебов между пятью людьми так, чтобы их доли составляли арифметическую прогрессию и чтобы одна седьмая суммы трех больших долей была равна сумме двух меньших.

2) Определите длину сторон прямоугольника, если известно, что их отношение равно a, а площадь прямоугольника равна S.

5. В IX книге "Начал" Евклида воспроизведен фрагмент пифагорейского учения о четном и нечетном, в котором доказаны следующие утверждения:

---

[7] Десятичная позиционная система – изобретение индийских математиков VI века.

[8] Энциклопедический словарь Ф.А. Брокгауза и И.А. Ефрона сообщает, что "Сенкере (Senkereh) — арабское имя местности древнего Эласcара-Ларсы, может быть, происходящее от древнего Сингар-Сумир в Южной Вавилонии. Здесь в 1849—54 гг. производил раскопки англичанин Лофтус, который открыл в С. и близлежащем Телль-Сифр множество глиняных табличек с клинообразными текстами делового характера, датированных по царствованиям эласcарских царей, а также вавилонских — Хаммуроби и Шамшиилуны. Найдено также место фабрики со множеством частью готовых, частью неоконченных медных ваз и сосудов (отсюда имя Tell-Sifr — "холм меди"). Здесь же найдено в одной из гробниц много глиняных дощечек с барельефами, представляющими сцены из частной жизни; подобные жанровые картинки — редкость, так как вавилонские барельефы имеют большею частью религиозный, ассирийские — военный характер. Наконец, здесь найден математический текст, начертанный на глиняной доске и содержащий вычисления квадратов и кубов".

1) Сумма любого числа четных чисел является четным числом.

2) Сумма четного числа нечетных чисел является четным числом.

3) Сумма нечетного числа нечетных чисел является нечетным числом.

4) Произведение двух чисел четно тогда и только тогда, когда по крайней мере один из сомножителей четен.

Приведите доказательства этих четырех свойств натуральных чисел.

6. Докажите, что из прямоугольников одинакового периметра квадрат имеет наибольшую площадь.

6. Иррациональные числа и несоизмеримые отрезки

Действительное число, не являющееся рациональным, называется *иррациональным.* Любое действительное число a можно записать в виде бесконечной десятичной дроби (периодической, если $a-$ рациональное число и непериодической, если $a-$ иррациональное число).

Если число a записывается в виде конечной десятичной дроби, то его можно записать в виде бесконечной десятичной дроби с периодом 9. Например,

$$\frac{3}{4}=0,75 \quad \text{и} \quad \frac{3}{4}=0,74(9)=0,74999\ldots.$$

Для положительных чисел a и b равенство $b=\sqrt{a}$ означает, что $b^2=a$ (в этом случае b называется *квадратным корнем* из a). Для любого положительного числа a уравнение $x^2=a$ имеет два корня: $x_1=\sqrt{a}$ и $x_2=-\sqrt{a}$.

Примеры иррациональных чисел: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, π, e.

Докажем иррациональность числа $\sqrt{2}$. Предположим, что существует рациональное число x такое, что $x^2=2$. Тогда $x=m/n$, где натуральные числа m и n не имеют общего делителя, отличного от 1. Следовательно, хотя бы одно из чисел m или n не делится на 2 (т.е. является *нечетным*). Имеем $(m/n)^2=2$ и, значит, $m^2=2n^2$. Отсюда видно, что число $m-$ четное. После подстановки $m=2k$ в равенство $2n^2=m^2$ получим $2n^2=4k^2$, т.е. $n^2=2k^2$ и, следовательно, число n тоже четное. Получено противоречие.

По определению квадратного корня из неравенств

$$1,4^2=1,96<2<2,25=1,5^2$$

следует, что $1,4<\sqrt{2}<1,5$. Аналогично, верны неравенства $1,41<\sqrt{2}<1,42$, так как $1,41^2<2$, а $1,42^2>2$. Применив еще раз тот же прием, найдем, что

$$1,414<\sqrt{2}<1,415 \quad \text{и, значит,} \quad \sqrt{2}\approx 1,414.$$

Этим методом или любым алгоритмом извлечения квадратного корня можно находить находить всё более точные приближения числа $\sqrt{2}$ рациональными числами. Но ни одно из этих приближений не будет в точности равно корню из двух, так как число $\sqrt{2}$ иррационально.

Два отрезка называют *соизмеримыми*, если существует отрезок, целое число раз укладывающийся в каждом из данных отрезков. Из теоремы Пифагора и иррациональности числа $\sqrt{2}$ следует, что *диагональ квадрата несоизмерима с его стороной*. Действительно, пусть a – длина стороны квадрата и d – длина его диагонали. Предположим, что существует $s > 0$ такое, что $a = l \cdot s$ и $d = k \cdot s$, где $k, l \in \mathbb{N}$ (иными словами, отрезок длины s укладывается l раз на стороне и k раз на диагонали данного квадрата). Тогда по теореме Пифагора $2l^2s^2 = k^2s^2$ и, следовательно, $k^2 = 2l^2$. Отсюда $(k/l)^2 = 2$, что противоречит иррациональности числа $\sqrt{2}$.

Общекультурный аспект открытия несоизмеримых отрезков заключается в том, что "впервые было доказательно установлено отсутствие чего-то – в данном конкретном случае общей меры стороны и диагонали одного и того же квадрата" (см. [17, с.9]). Открытие несоизмеримости, т.е. обнаружение таких величин, отношение которых не может быть выражено с помощью отношения целых чисел, является наивысшим достижением пифагорийской школы[9] и поворотным этапом в развитии всей математики[10].

Упражнения.

1. Постройте отрезки, длины которых равны $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$.

2. Докажите иррациональность числа $\sqrt[3]{5}$

3. Египтяне, заменяя площадь круга площадью равновеликого квадрата, брали за сторону последнего 8/9 диаметра круга. Найдите отсюда приближенное значение числа π. Сравните полученный результат с первыми строгими оценками числа π, найденными Архимедом[11]:

$$3\,\frac{10}{71} < \pi < 3\,\frac{1}{7} \quad \text{или} \quad 3,1409... < \pi < 3,1428....$$

[9] Пифагорейская система знаний состояла из четырех разделов: арифметики (учении о числах), геометрии (учении о фигурах и их измерении), музыки (учении о гармонии или теории музыки) и астрономии (учении о строении Вселенной). Наибольший расцвет школы Пифагора наблюдался в V – начале VI века до нашей эры (см., например, [2], [3], [4, с.109-114] и [6]). Полученные пифагорейцами математические результаты нашли отражение в "Началах" Евклида.

[10] Теорему о несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной полезно сравнить с теоремой Гёделя. В 1931 г. Гёдель доказал, что в любой формальной системе, содержащей элементарную арифметику, можно сконструировать предложение, которое будет заведомо истинным, но в принципе не доказуемым средствами этой системы. По теореме Гёделя, полная формализация знания невозможна, а понятия истинности и доказуемости принципиально невозможно сделать эквивалентными (см., например, [16, с.3], [17, с.389]).

[11] В работе Архимеда "Измерение круга" доказана теорема: "Периметр всякого круга равен утроенному диаметру с избытком, который меньше одной седьмой части диаметра, но больше десяти семьдесят первых" (см., например, [3, с.25]).

4. Ахиллес стартует в ста метрах позади черепахи одновременно с ней и бежит со скоростью 36 км/ч. Черепаха передвигается со скоростью 36 мм/сек. На каком расстоянии от старта черепахи Ахиллес достигнет её? Запишите ответ в километрах, метрах и сантиметрах[12].

5. Согласно некоторой модели о размножении бактерий каждую секунду бактерии удваиваются. Через сколько секунд число бактерий превзойдет число протонов и нейтронов в Солнечной системе (которое оценивается числом 10^{57}).

6. Одно из определений числа e основано на равенстве

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = 1.$$

Какой геометрический смысл этого равенства?

7. Счетные множества и мощность множеств

Бесконечное множество A называется *счетным*, если его элементы можно занумеровать. Множество A счетное, если существует взаимно однозначное соответствие между множеством A и множеством $\mathbb{N}$ натуральных чисел (иначе говоря, существует отображение множества $\mathbb{N}$ на A такое, что каждому натуральному числу соответствует ровно один элемент множества A и, обратно, каждому элементу множества A соответствует ровно одно натуральное число).

Множество четных натуральных чисел счетное, взаимно однозначное соответствие между этим множеством и множеством $\mathbb{N}$ устанавливается по правилу: $k \leftrightarrow 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Множества $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ тоже счетные (см., например, [8, § 3]).

В каждом бесконечном множестве имеется счетное подмножество.

Напомним, что

$$[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 \leqslant x \leqslant 1\}.$$

Отрезок $[0,1]$ не является счетным множеством. Это утверждение доказывается *диагональной процедурой Кантора*[13]. Предположим, что все числа отрезка $[0,1]$ занумерованы в последовательность:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Выразим каждое число отрезка $[0,1]$ в виде бесконечной десятичной дроби, записывая (для однозначности) конечные десятичные дроби как дроби с девяткой в периоде (например, $0,25 = 0,24(9) = 0,24999\ldots$). Тогда

$$a_1 = 0,\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15}\ldots$$

[12]Эта задача связана с апорией Зенона "Ахиллес и черепаха", о которой можно прочитать, например, в [4, с. 161] и http://www.proza.ru/2012/07/02/453.

[13]Георг Кантор (1845-1918) – немецкий математик, создатель теории множеств. Основные теоремы теории множеств изложены в статье В.М. Тихомирова в журнале «Квант» (№5, 1995; http://kvant.mccme.ru/1995/05/).

и, вообще, для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$a_n = 0,\alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}\alpha_{n4}\alpha_{n5}\dots, \quad \alpha_{nk} \in \{0, 1, \dots, 9\},$$

где α_{nk} – цифры числа a_n в десятичной системе счисления. Возьмем число

$$b = 0,\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5\dots,$$

такое, что $\beta_1 = 1$, если $\alpha_{11} \neq 1$, и $\beta_1 = 2$, если $\alpha_{11} = 1$; вообще, для любого $n \in \mathbb{N}$ полагаем $\beta_n = 1$, если $\alpha_{nn} \neq 1$, и $\beta_n = 2$, если $\alpha_{nn} = 1$. Это число b принадлежит отрезку $[0, 1]$ и не совпадает ни с одним из чисел a_n, так как $\beta_n \neq \alpha_{nn}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Получено противоречие. Таким образом, несчетность отрезка $[0, 1]$ доказана.

Говорят, что множество A имеет *мощность континуума*, если существует взаимно однозначное соответствие между множеством A и отрезком $[0, 1]$. Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел имеет мощность континнума. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, следующие множества имеют мощность континуума: отрезок $[a, b]$, интервал (a, b), множество $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, декартов квадрат $[a, b]^2$ и декартово произведение $(-\infty, a) \times (b, +\infty)$. Мощность континуума имеют также произвольные прямая, квадрат, куб, окружность, круг и плоскость.

Говорят, что множества A и B имеют одинаковую *мощность*, если между этими множествами существует взаимно однозначное соответствие. В этом случае имеется отображение φ из A в B такое, что для каждого элемента $x \in A$ существует единственный элемент $y \in B$ такой, что $y = \varphi(x)$ и, обратно, для каждого элемента $y \in B$ существует ровно один элемент множества $x \in A$ такой, что $y = \varphi(x)$. Счетность множества A равносильна тому, что A равномощно множеству $\mathbb{N}$. Множество A имеет мощность континуума, если оно равномощно отрезку $[0, 1]$.

Конечные множества A и B имеют одинаковую мощность тогда и только тогда, когда они состоят из одинакового числа элементов. Множество A не является конечным (т.е. является *бесконечным*) тогда и только тогда, когда существует подмножество $C \subset A$, отличное от A и равномощное множеству A.

Множество B имеет мощность, бóльшую мощности множества A, если существует подмножество $C \subset B$, равномощное A, но в множестве A нет части, равномощной B. Георг Кантор доказал, что множество всех подмножеств произвольного множества A имеет мощность, бóльшую мощности множества A.

Вот что пишет Анри Пуанкаре[14] о результатах Георга Кантора:

"Понятие бесконечности уже давно было введено в математику. Но эта бесконечность была такой, какую философы называют потенциальной. В математике бесконечность обозначала количество, способное расти выше или ниже какого бы то ни было предела; это было изменяющееся количество, о котором можно было сказать, что оно перейдет все пределы, но нельзя было сказать, что оно их перешло. Кантор решил ввести в математику актуальную бесконечность, т.е. количество, не только способное перейти все пределы, но уже перешедшее через них. Он поставил себе вопросы

[14] Анри Пуанкаре (1854-1912) – выдающийся французский математик.

вроде следующих: существует ли больше точек в пространстве, чем целых чисел? Существует ли больше точек в пространстве, чем точек на плоскости? И так далее..." (см. [14, с.368]).

Упражнения.

1. Укажите все взаимно однозначные соответствия между множествами $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$.

2. Докажите счетность множества $\mathbb{Z}$ целых чисел. Приведите примеры счетных подмножеств множества $\mathbb{Z}$. Верно ли, что всякое бесконечное подмножество множестваа $\mathbb{Z}$ счетно?

3. Докажите счетность множества $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

4. Докажите, что объединение любых двух счетных множеств является счетным множеством. Верно ли аналогичное свойство для объединения конечного или счетного числа множеств?

5. Докажите счетность множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

6. Докажите, что если из бесконечного множества A удалить произвольное конечное множество, то получится множество, равномощное множеству A.

7. Докажите, что каждое из следуюших множеств имеет мощность континуума:

$$(0, 1], \quad (-\pi, \pi), \quad (0, \infty), \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

8. Пользуясь тем, что множество $\mathbb{Q}$ счетное, а $\mathbb{R}$ несчетное, докажите, что множество иррациональных чисел несчетно.

8. Логика высказываний

На вопрос "Что такое логика?" отвечают по-разному. Вот что написано в предисловии к учебнику [11]:

"Логика – это *фундаментальная развитая теоретическая дисциплина*, прекрасный *образец построения строгой научной теории*, разработки ее содержания и анализа глубоких проблем "чистой науки", это отличное знакомство с конкретными методами и приемами работы тех, кого мы называем "учеными в области точного знания"...

Логика – это *особая духовно-преобразующая практика*. Будучи по самому своему существу дисциплиной, синтезирующей неземную красоту математики[15] с гуманистической поэзией философии, логика погружает человека в мир *эстетики особого рода* – эстетики Интеллектуального, о которой еще великий Аристотель – основатель логики – говорил, что приобщение к ней есть высшее счатье и тем самым безусловная цель для человека (поскольку именно она в чистом виде выражает сущность человека

[15] А то, что она неземная, хорошо известно еще со времен Платона (IV в. до н.э.).

как *разумного* существа). Логика открывает человеку новый горизонт бытия (в каком-то смысле его, человека, *собственное* "измерение") – измерение "познавательного удивления"... Логика демонстрирует нам всю красоту ума, как она есть. Логическая проблематика *самым тесным образом* связана с предельными мировоззренческими вопросами, "последними" основаниями бытия и познания...

Логика – это *искусство мыслить в практическом смысле этого слова.* Это реальная отработка необходимых навыков мыслительной деятельности на конкретных содержательных примерах, многие из которых представляют собой самые что ни на есть "реально-жизненные" случаи.[16]"В этом аспекте логика выступает как *практическая дисциплина.*

Основные задачи *дедуктивной логики*:

1. Выделение и систематизация правильных умозаключений, т.е. отбор из множества переходов от данных m высказываний к одному высказыванию тех, которые гарантируют сохранение истины. Формулирование четких (эффективных, носящих алгоритмический характер) критериев установления (не)правильности умозаключений.

2. Выделение из всего множества высказываний подмножества логически истинных.

Высказыванием называют повествовательное предложение, которое либо истинно, либо ложно. Любое высказывание принимает одно и только одно значение из набора $\{0,1\}$ (здесь 1 обозначает истинностное значение "истина", а 0 – истинностное значение "ложь"). Логика высказываний является одним из вариантов дедуктивной логики. О том, какие умозаключения в классической логике высказываний считаются правильными, сказано в конце настоящего раздела.

Сложные высказывания – это такие высказывания, в составе которых можно выделить другие высказывания как их собственные части. Высказывание, не являющееся сложным, называется *простым.* Значение сложного высказывания однозначно определяется по значениям составляющих его простых высказываний. Для обозначения простых высказываний используются *пропозициональные*[17] *переменные* $p, q, r, s, \ldots$.

В *классической логике высказываний* (КЛВ) основными логическими операциями являются: отрицание (обозначается чертой сверху, читают: "не"), конъюнкция[18] $\wedge$ (читают: "и"), дизъюнкция $\vee$ (читают: "или"), импликация $\rightarrow$ (читают: "если ..., то") и эквиваленция $\leftrightarrow$ (читают: "тогда и только тогда", "эквивалентно", "равносильно"):

[16]В средние века (с середины XII в. до середины XIV в.) логика входила в так называемый *тривиум* -– цикл из трех наук, в который, кроме логики, входили еще грамматика и риторика. Грамматика отвечала на вопрос, как правильно говорить, риторика – как говорить изящно, а логика – как сделать так, чтобы выводы, к которым приходит человек в процессе рассуждения, были обоснованы. Изучение этих трех наук в учебных заведениях того времени было обязательным.

[17]От лат. *propositio* – высказывание.

[18]Часто конъюнкцию обозначают символом &, а отрицание – символом $\urcorner$; см., например, [11], [13].

p	$\overline{p}$
0	1
1	0

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Видно, что импликация $p \to q$ ложна в единственном случае: когда посылка p истинна, а заключение q ложно, а эквиваленция $p \leftrightarrow q$ истинна в том и только в том случае, когда высказывания p и q имеют одинаковые логические значения.

Формулы в КЛВ определяются следующими правилами:

1) пропозициональные переменные $p, q, r, s, \ldots$ являются формулами;

2) если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – формулы, то $\overline{\mathbf{A}}$, $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}$ – тоже формулы.

Формула, входящая в состав некоторой более сложной формулы, называется ее *подформулой* и выделяется скобками с учетом приоритета логических операций:
1) отрицание, 2) конъюнкция, 3) дизъюнкция, 4) импликация, 5) эквиваленция.

Для формализации сложного высказывания следует:
– выделить все простые высказывания, которые входят в состав данного высказывания, и обозначить их пропозициональными переменными;
– обозначить грамматические союзы и знаки пунктуации знаками соответствующих логических операций;
– записать формулу.
Например, формализацией высказывания "студент не знает ни физики, ни истории тогда и только тогда, когда он не знает физику или историю" является формула

$$\mathbf{F} = (\bar{p} \wedge \bar{q}) \leftrightarrow \overline{(p \vee q)},$$

где $p = \{$студент знает физику$\}$, $q = \{$студент знает историю$\}$. Формулы $\mathbf{F_1} = \bar{p} \wedge \bar{q}$ и $\mathbf{F_2} = \overline{(p \vee q)}$ являются подформулами формулы $\mathbf{F}$.

Каждая формула имеет *таблицу истинности.* В первой строке этой таблицы записывают все пропозициональные переменные, входящие в формулу, подформулы данной формулы и саму формулу, а в последующие 2^n строк соответствующие логические значения (здесь $n -$ количество пропозициональных переменных в формуле). Формула называется *выполнимой*, если она принимает логическое значение "истина" хотя бы при одной допустимой интерпретации входящих в нее пропозициональных переменных. Если формула не является выполнимой, то она называется *тождественно-ложной* или *противоречием.*

Составим таблицу истинности формулы

$$\mathbf{Q} = (p \to q) \wedge \bar{p}.$$

Подформулы этой формулы: p, q, $\bar{p}$, $p \to q$. Логические значения формулы $\mathbf{Q}$ укажем в последнем столбце таблицы:

p	q	$\bar{p}$	$p \to q$	$\mathbf{Q}$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	0

Видно, что формула $\mathbf{Q}$ выполнима.

Формула называется *общезначимой формулой* или *тавтологией*, если она принимает логическое значение "истина" при любой допустимой интерпретации входящих в нее пропозициональных переменных. Всякая общезначимая формула выражает *логический закон*. Правильные рассуждения – это рассуждения в соответствии с логическими законами.

В приведенных выше доказательствах бесконечности множества простых чисел, иррациональности числа $\sqrt{2}$ и несчетности отрезка $[0, 1]$ использован *метод приведения к противоречию* (contradictio in contrarium). Сначала принимают предположение, что доказываемое утверждение p неверно, а затем показывают, что при таком предположении было бы верно некоторое утверждение q, которое заведомо неверно. Отсюда следует, что утверждение p верно. Этот метод доказательства основан на формуле

$$\mathbf{T} = ((\bar{p} \to q) \wedge \bar{q}) \to p.$$

Из следующей таблицы видно, что формула $\mathbf{T}$ является тавтологией:

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \to q$	$(\bar{p} \to q) \wedge \bar{q}$	$\mathbf{T}$
0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1

Следующие законы относятся к числу основных логических законов[19].

1. Закон исключенного третьего: $\mathbf{A} \vee \overline{\mathbf{A}}$.
Из двух противоречащих друг другу высказываний, по крайней мере одно истинно.

2. Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{\mathbf{A}}} \leftrightarrow \mathbf{A}$.
Двойное отрицание высказывания эквивалентно его утверждению.

3. Закон контрапозиции: $(\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \leftrightarrow (\overline{\mathbf{B}} \to \overline{\mathbf{A}})$.
Из первого высказывания вытекает второе тогда и только тогда, когда из отрицания второго высказывания вытекает отрицание первого.

4. Законы де Моргана: $\overline{(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B})} \leftrightarrow (\overline{\mathbf{A}} \vee \overline{\mathbf{B}})$, $\overline{(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})} \leftrightarrow (\overline{\mathbf{A}} \wedge \overline{\mathbf{B}})$.
Отрицание конъюнкции эквивалентно дизъюнкции отрицаний, отрицание дизъюнкции эквивалентно конъюнкции отрицаний.

[19]Об основных логических законах см., например, в [1] и [11].

5. Закон транзитивности импликации: $((\mathbf{A} \to \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{B} \to \mathbf{C})) \to (\mathbf{A} \to \mathbf{C})$.
Если из первого высказывания вытекает второе, а из второго – третье , то и из первого высказывания вытекает третье.

6. Закон отрицания импликации: $\overline{(\mathbf{A} \to \mathbf{B})} \leftrightarrow (\mathbf{A} \wedge \overline{\mathbf{B}})$.

7. Законы коммутативности дизъюнкции и конъюнкции:

$$(\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \leftrightarrow (\mathbf{B} \vee \mathbf{A}), \quad (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \leftrightarrow (\mathbf{B} \wedge \mathbf{A}).$$

8. Законы ассоциативности дизъюнкции и конъюнкции:

$$(\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})) \leftrightarrow ((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}), \quad (\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})) \leftrightarrow ((\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C}).$$

9. Законы дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции и наоборот:

$$(\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C})) \leftrightarrow ((\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{C})), \quad (\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \vee \mathbf{C})) \leftrightarrow ((\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{C})).$$

В законах 1 – 9 через $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ обозначены произвольные формулы КЛВ. Из этих законов видно, что операции над высказываниями аналогичны соответствующим операциям над множествами. Например, закон транзитивности импликации соответствует следующему свойству для множеств: если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$. Как и для множеств, формулы и умозаключения КЛВ часто иллюстрируют диаграммами Эйлера-Венна[20].

Умозаключение – это процесс, в результате которого из одного или нескольких данных высказываний (посылок) выводится новое высказывание (заключение). Из формул $\mathbf{X_1}, \dots, \mathbf{X_m}$ *логически следует* формула $\mathbf{Y}$, если не существует такой интерпретации параметров, входящих в состав $\mathbf{X_1}, \dots, \mathbf{X_m}$ и $\mathbf{Y}$, при которой каждая из формул $\mathbf{X_1}, \dots, \mathbf{X_m}$ приняла бы значение "истина" , а формула $\mathbf{Y}$ – значение "ложь". В этом случае формула

$$\mathbf{X_1} \wedge \mathbf{X_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{X_m} \to \mathbf{Y}$$

является тавтологией. Умозаключение является *правильным* тогда и только тогда, когда из его посылок логически следует его заключение. Приведенная выше таблица истинности для формулы $\mathbf{T}$ доказывает, что из формул $\mathbf{X_1} = \bar{p} \to q$ и $\mathbf{X_2} = \bar{q}$ логически следует формула $\mathbf{Y} = p$. Поэтому умозаключение "contradictio in contrarium" является правильным[21].

---

[20]В логике под диаграммой Эйлера-Венна имеют в виду "некоторую графическую схему, на которой представлен универсум рассуждения, разбитый по некоторому списку параметров на взаимно дополнительные подклассы" [1, с.416].

[21]О наиболее распространенных способах правильных рассуждений см., например, в [1, § 4.2], [11, § 3.6] и [18, § 6]

Упражнения.

1. Приведите примеры простых и сложных высказываний.

2. Формализуйте высказывание: "Если он умный человек, то он увидит свою ошибку, и если он искренний человек, то он признает ее".

3. Проверьте, является ли тавтологией формула

$$\mathbf{F} = (\bar{p} \wedge \bar{q}) \leftrightarrow \overline{(p \vee q)}.$$

4. В ходе следствия установлена истинность следующих высказываний об участии в преступлении:

1) Если Иванов не участвовал или Петров участвовал, то Сидоров участвовал.

2) Если Иванов не участвовал, то Сидоров не участвовал.

Можно ли по этим данным определить, кто из подозреваемых участвовал в преступлении?

5. Докажите законы де Моргана и поясните их диаграммами Эйлера-Венна.

6. Укажите диаграммы Эйлера-Венна для законов дистрибутивности дизъюнкции относительно конъюнкции и наоборот.

7. Составьте таблицы истинности следующих формул:

$$\begin{array}{ll}
1)\ \ p \wedge (q \vee \overline{r}), & 2)\ \ \overline{p} \to \overline{p}, \\
3)\ (\overline{p} \vee q) \to (\overline{p} \wedge q), & 4)\ \ \overline{(p \vee \overline{q})} \to (\overline{p} \wedge q), \\
5)\ (\overline{p} \to \overline{q}) \to (q \to p), & 6)\ \overline{p} \to (p \to \overline{p}), \\
7)\ \ (p \to q) \to (\overline{p} \to \overline{q}), & 8)\ \ \overline{(\overline{p} \to q)} \vee (\overline{p} \wedge \overline{q}), \\
9)\ \ ((p \wedge q) \to r) \to (\overline{r} \to (\overline{p} \wedge \overline{q})). &
\end{array}$$

Какие из этих формул выполнимы? Есть ли среди них тавтологии?

8. С помощью таблиц истинности докажите, что следующие формулы являются тавтологиями:

$$\begin{array}{lll}
1)\ \ p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow q, & 2)\ \ p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow q, & 3)\ \ (p \to q) \leftrightarrow (\overline{p} \vee q), \\
4)\ p \to (q \to p), & 5)\ \ \ \overline{p} \to (p \to q), & 6)\ \ (p \to \overline{q}) \leftrightarrow \overline{(p \wedge q)}, \\
7)\ (\overline{q} \to \overline{p}) \leftrightarrow (p \to q), & 8)\ (\overline{p} \to p) \to p, & 9)\ \ (\overline{p} \to q) \leftrightarrow (p \vee q),
\end{array}$$

9. Логические операции ($\veebar$) (*строгая дизъюнкция*), ($\uparrow$) (*стрелка Пирса*)[22] и ($|$) (*штрих Шеффера*) определяются соответственно по формулам

$$(p \veebar q) \leftrightarrow ((p \to \overline{q}\,) \vee (q \to \overline{p}\,)), \quad (p \uparrow q) \leftrightarrow (\overline{p} \wedge \overline{q}\,), \quad (p \,|\, q) \leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q}\,).$$

Составьте таблицы истинности для операций ($\veebar$), ($\uparrow$) и ($|$) и докажите тавтологии

$$(p \veebar q) \leftrightarrow \overline{(p \leftrightarrow q)} \quad (p \uparrow q) \leftrightarrow \overline{(p \vee q\,)}, \quad (p \,|\, q) \leftrightarrow \overline{(p \wedge q\,)}.$$

[22]Иногда строгую дизъюнкцию называют *суммой по модулю два*, а стрелку Пирса называют *штрихом Нико*.

Какой операции над множествами соответствует строгая дизъюнкция?

10. Согласно легенде, халиф Омар обосновывал необходимость сожжения Александрийской библиотеки следующим рассуждением: "Если ваши книги согласны с Кораном, то они излишни. Если же ваши книги не согласны с Кораном, то они вредны. Но вредные или излишние книги следует уничтожить. Поэтому ваши книги следует уничтожить". Здесь первые три высказывания являются посылками, а четвертое – заключением. Проверьте правильность этого умозаключения.

11. Докажите, что из формул $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ и $\overline{\mathbf{B}}$ логически следует формула $\overline{\mathbf{A}}$.

12. Докажите, что из формул $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ и $\overline{\mathbf{A}}$ логически следует формула $\mathbf{B}$.

Список литературы

[1] Бочаров В.А., Маркин В.И. Введение в логику. Учебник. М.: ИД «Форум»: ИНФРА-М. 2008[23].

[2] Ван дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука: Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции. Изд. 3-е. М.: КомКнига, 2007.

[3] Волошинов А.В. Пифагор: Союз истины, добра и красоты. Изд. 2-е. М.: Изд-во ЛКИ, 2007.

[4] Гаспаров М.Л. Занимательная Греция: Рассказы о древнегреческой культуре. М.: "Фортуна Лимитед" , 2002.

[5] Евклид. Начала / Предисл., пояснит. введ. и доп. М.Е. Ващенко-Захарченко. Изд. 3-е. М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ" , 2013.

[6] Жуков А.В. Прометеева искра: Античные истоки искусства математики. М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ" , 2012.

[7] Жуков А.В. Вездесущее число π. Изд.4-е. М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ" , 2011.

[8] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[9] Манин Ю.И. Математика как метафора. Изд. 2-е. М.: МЦНМО, 2008[24].

[23] Аннотации этой и большинства других книг из приведенного списка доступны в интернете. О возрастающей роли математики и логики в гуманитарном образовании говорится в [11], [15, глава 10] и [17]. В РГГУ несколько лет обучение математике базировалось на книге [19].

[24] В этой книге Ю.И.Манина собраны очерки по истории и философии математики и физики, теории культуры и языка, а также отрывки из воспоминаний, стихи автора и стихотворные переводы.

[10] Меннингер К. История цифр. Числа, символы, слова. М.: ЗАО Центрполиграф, 2011.

[11] Михайлов К.А. Логика. Учебник для бакалавров. Изд. 2-е. М.: Издательство Юрайт, 2014.

[12] Нейгебауэр О. Точные науки в древности. Изд. 3-е. М.: Издательство ЛКИ, 2008.

[13] Новиков Ф.А. Дискретная математика. Изд. 2-е. СПб.: Питер, 2013.

[14] Пуанкаре А. О науке. М.: Наука, 1983.

[15] Роганов Е.А., Тихомиров Н.Б., Шелехов А.М. Математика и информатика для юристов. М.: МГИУ, 2005.

[16] Успенский В.А. Математическое и гуманитарное: преодоление барьера. Изд. 3-е. М.: МЦНМО, 2014.

[17] Успенский В.А. Апология математики. Изд.2-е. СПб.: Амфора, 2012.

[18] Хоменко И.В. Логика. Теория и практика аргументации. Учебник и практикум: учебник для бакалавров. Изд. 3-е. М.: Издательство Юрайт, 2014.

[19] Шикин Е.В., Шикина Г.Е. Гуманитариям о математике. Математика: Пути знакомства. Основные понятия. Методы. Модели: Учебник. Изд. 3-е. М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ" , 2009.

Рекомендуемые сайты

1. http://www.etudes.ru/ru (этюды, выполненные с использованием современной компьютерной 3D-графики, увлекательно и интересно рассказывающие о математике и ее приложениях).
2. http://www.mccme.ru/free-books/ (свободно распространяемые издания Московского центра непрерывного математического образования).
3. http://kvant.mccme.ru/index.htm (архив номеров журнала "Квант").
4. http://www.math.ru/lib/ (книги по математике для студентов и школьников).
5. http://www.mathedu.ru/hist-math/-/1/1 (книги и журналы по истории математики).
6. http://www.logic-books.info/ (библиотека материалов по логике, занимательной науке, нестандартному мышлению)
7. https://ru.khanacademy.org/ (видеоролики по математике и другим предметам для студентов I и II курсов).
8. https://postnauka.ru/video/30599 (Алексей Семихатов "Математический язык в познании и мышлении")
9. https://www.youtube.com/watch?v=rQJMT9nbFhk (Алексей Савватеев "Математика для гуманитариев")