

УДК 51

В93

Авторы:

*Голосов П. Е., Горелов В. И.,
Карелова О. Л., Федосеев А. И.*

Рецензенты:

Б. М. Пранов, доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой менеджмента, информационных технологий
и международного туризма РМАТ;
И. М. Гостев, доктор технических наук,
профессор ВШЭ

В93 Начала математических знаний [Текст]: учебник / П. Е. Голосов, В. И. Горелов, О. Л. Карелова, А. И. Федосеев; под общ. ред. профессора В. И. Горелова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации: РАНХиГС, 2016. – 126, [4] с.

Учебник построен по принципу «от простого к сложному». В нем кратко рассмотрены те базовые понятия математики и ее приложений, которые активно используются при подготовке студентов и необходимы в их дальнейшей деятельности. Эти понятия проиллюстрированы большим числом разобранных примеров, позволяющих понять области применения теории.

Для студентов вузов гуманитарных направлений.

УДК 51

© Российская академия народного хозяйства и
государственной службы при Президенте Российской Федерации, 2016

Оглавление

Предисловие.....	4
Раздел I. Теория вероятностей.....	5
1.1. Элементы комбинаторики.....	5
1.2. Пространство элементарных событий. Операции над событиями	7
1.3. Определение вероятности события. Непосредственное вычисление вероятностей	11
1.4. Теоремы сложения и умножения вероятностей.....	15
1.5. Формула полной вероятности и формула Байеса	19
1.6. Схема испытаний с повторениями.....	23
Раздел II. Случайные величины.....	29
2.1. Законы распределения и числовые характеристики случайных величин.....	29
2.2. Основные законы распределения вероятностей.....	33
Раздел III. Элементы математической статистики	42
3.1. Первичная обработка и графическое представление выборочных данных.....	42
3.2. Числовые характеристики выборочной совокупности (точечные оценки)	45
3.3. Доверительные интервалы	49
3.4. Корреляция и регрессия.....	51
Раздел IV. Линейная алгебра	55
4. Матрицы и действия над ними.....	55
4.1. Основные понятия.....	55
4.2. Действия над матрицами	56
4.2. Определители.....	61
4.2.1. Основные понятия.....	61
4.2.2. Свойства определителей.....	62
4.3. Обратная матрица.....	65
4.3.1. Основные понятия.....	65
4.3.2. Решение матричных уравнений	68
4.3.3. Метод элементарных преобразований	69
4.4. Системы линейных алгебраических уравнений	71
4.4.1. Основные понятия.....	71
4.4.2. Правило Крамера решения СЛАУ	74
4.4.3. Метод Гаусса решения СЛАУ	75
Раздел V. Приложения теории матриц и систем линейных уравнений.....	80
5. Оптимизационные экономико-математические модели.....	80
5.1. Основные понятия.....	80
5.2. Метод парных сравнений	81
5.3. Оптимальное программирование (постановка задачи).....	85
5.4. Графическое решение задачи линейного программирования.....	90
Раздел VI. Элементы финансовой математики и инвестиционного анализа.....	95
6.1. Простые процентные ставки	95
6.1.1. Расчет процентов для краткосрочных ссуд.....	97

6.1.2. Переменные ставки	99
6.2. Сложные процентные ставки (compound interest).....	100
6.2.1. Дробное число лет начисления сложных процентов	101
6.2.2. Номинальная и эффективные ставки.....	103
6.2.3. Учет инфляции.....	105
6.3.1. Статистические методы оценки эффективности инвестиций	108
6.3.2. Динамические методы оценок эффективности инвестиций	114
Литература	125

Предисловие

Преподавание математики студентам гуманитарной направленности имеет свои особенности. Бурное развитие информационных технологий, различных пакетов прикладных программ вызывает необходимость их использования в практической деятельности невозможно без понимания основных теоретических закономерностей и акцентированного изучения некоторых разделов математики. При этом освоение базовых понятий математики позволяет студентам логично и аргументированно рассуждать, проводить собственные исследования.

Содержание учебника охватывает понятия и методы, необходимых для усвоения различных дисциплин и связанных с ними информационных технологий, служит кратким конспектом, позволяющим обращаться к более углубленному изучению методов и алгоритмов математики и ее приложений в практической деятельности.

Структурно курс системно разбит на темы, посвященные каждому базовому понятию. Каждый подраздел содержит краткое изложение материала, иллюстрации, подробно разобранные примеры и примеры для самоподготовки. Это позволяет читателю самостоятельно овладеть всеми понятиями с тем, чтобы их можно было бы использовать в дальнейшем.

Данный учебник подготовлен авторами различных специальностей — математиками, информатиками, экономистами и менеджерами. Он был бы невозможен без активных консультаций с преподавателями гуманитарных направлений. Их опыт и видение математики как полезного аппарата познания позволили выделить различные аспекты как в изложении курса, так и в его структуре и добавили практическую составляющую в материал учебника. Авторы выражают особую благодарность А. В. Фетисову и Е. В. Миронову, чья энергия в конце концов и подвигла их на написание учебника.

Раздел I. Теория вероятностей

1.1. Элементы комбинаторики

Комбинаторика определяет число комбинаций, которые можно составить из данного множества элементов.

I. Пусть конечное неупорядоченное множество состоит из n элементов. Произведем следующие испытания:

Определение 1. Упорядочим данное множество, пронумеровав все его элементы. Тогда элементарным событием в испытании будет произвольная перестановка из n элементов, а количество возможных **перестановок** $P = n!$

Определение 2. Разобьем множество на упорядоченные подмножества, которые содержат по m ($m < n$) элементов и различаются или порядком, или элементами. Тогда элементарным событием в испытании будет произвольное размещение из n элементов по m . Количество таких **размещений**

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1).$$

Определение 3. Разобьем множество на неупорядоченные подмножества, которые содержат по m ($m < n$) элементов и различаются хотя бы одним элементом. Тогда элементарным событием в этом испытании будет сочетанием, а количество таких **сочетаний**

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Определение 4. Берем из множества наудачу m элементов с возвращением. Тогда в фиксированном подмножестве каждый элемент может повториться m раз. Элементарным событием в испытании будет **размещение** из n элементов по m с **повторением**, а количество таких размещений

$$R_n^m = n^m.$$

II. Пусть конечное множество из n разных элементов разбили на r подмножеств, в каждом из которых содержится n_i ($i = 1, 2, \dots, r$) элементов, при-

чем $\sum_{i=1}^r n_i = n$. Из каждого подмножества наудачу берем по m_i элементов без возвращения.

Определение 5. Тогда элементарным событием будет произвольная комбинация элементов. Количество таких комбинаций

$$K = C_{n_1}^{m_1} * C_{n_2}^{m_2} ... C_{n_r}^{m_r}, \text{ или}$$

$$K = A_{n_1}^{m_1} * A_{n_2}^{m_2} ... A_{n_r}^{m_r},$$

если учитывается порядок элементов.

III. Пусть конечное множество из n элементов разбили на r подмножеств, в каждом из которых содержится n_i ($i = 1, 2, \dots, r$) одинаковых элементов, причем

$$\sum_{i=1}^r n_i = n. \text{ Упорядочим это множество.}$$

Определение 6. Тогда элементарным событием будет произвольная перестановка из n элементов с повторениями, а число элементарных событий

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_r) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}.$$

Примеры для самостоятельного решения

1.1. Сколькими способами можно расставить на книжной полке библиотеки 5 книг по географии, 3 книги по биологии и 2 книги по математике?

1.2. Найдите число различных перестановок в слове математика; в слове система.

1.3. На столе 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Сколькими способами их можно распределить среди 9 человек?

1.4. В почтовом отделении продаются открытки десяти видов. Сколькими способами можно купить набор из 5 открыток, если открыток каждого вида имеется не менее восьми штук?

1.5. Трое юношей и две девушки выбирают место работы. Сколькими способами они могут это сделать, если в городе есть три завода (туда берут лишь

мужчин), и две фабрики, где требуются мужчины и женщины?

1.6. Для премий на математической олимпиаде выделено 5 экземпляров одной книги, 3 экземпляра другой и 2 экземпляра третьей книги. Сколькими способами могут быть вручены премии, если в олимпиаде участвовало 10 человек (каждому из участников вручается только одна книга)?

1.7. Автомобильные номера состоят из трех букв и четырех цифр. Найдите число таких номеров, если используются 24 буквы русского алфавита и 10 цифр (0, 1, ..., 9).

1.2. Пространство элементарных событий. Операции над событиями

Определение 7. Испытание (опыт) — наблюдение результатов реального или мысленного эксперимента, проводимого при определенной неизменной совокупности условий.

Определение 8. Событие — результат испытания.

Определение 9. Если в результате испытания некоторое событие непременно произойдет, то оно называется **достоверным** и обозначается буквой U . Событие, которое в данном испытании не может произойти, называется **невозможным** и обозначается буквой V .

Определение 10. Если в результате испытания некоторое событие может произойти, а может и не произойти, то оно называется **случайным**. Случайные события обозначаются буквами $A, B, C, D, \dots$.

Определение 11. Случайные события, которые нельзя разложить на более простые, называются **элементарными**. Возможное элементарное событие — это каждый из возможных результатов отдельного испытания.

Определение 12. Пространство элементарных событий — множество всех возможных элементарных событий, которые могут появиться в результате испытания. Пространство элементарных событий обозначаем как $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$, где $\omega_m (m = 1, 2, \dots)$ все возможные элементарные события. Пространство Ω может содержать конечное, исчислимое или неисчислимое множество значений.

Случайному событию A , которое может произойти в результате испытания, можно поставить в соответствие некоторое множество элементарных событий, которые благоприятны появлению этого события: $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$, которое является подмножеством Ω .

Определение 13. Сумма событий. Событие A называется **суммой** событий B и C , или $A = B + C$, или $A = B \cup C$ если в результате испытания происходит или событие B или событие C . Множество элементарных событий, благоприятных событию A , получают как объединение множеств элементарных событий, составляющих события B и C . Аналогично определяется сумма n ($n > 2$) событий.

Определение 14. Произведение событий. Событие A называется **произведением** событий B и C , или $A = BC$ или $A = B \cap C$ если в результате испытания произойдет как событие B , так и событие C . Множество элементарных событий, благоприятных появлению события A , определяется, как пересечение множеств элементарных событий благоприятных событиям B и C . Аналогично определяется произведение n ($n > 2$) событий.

Определение 15. Разность событий. Событие A называется **разностью** событий B и C , или $A = B - C$ или $A = B \setminus C$ если в результате испытания произойдет событие B и не произойдет событие C . Множество элементарных событий благоприятных появлению события A , содержит элементарные события благоприятные появлению события B , исключая те из них, которые благоприятны появлению события C .

Определение 16. События B и C называются **несовместными** в данном испытании, если соответствующие им множества элементарных событий не содержат одинаковых элементов: $B \cap C = \emptyset$ Или, другими словами, если происходит одно событие, то другое произойти не может.

Определение 17. События B и C называются **равновозможными** в данном испытании, если никакое из них не является объективно более возможным чем другое.

Определение 18. События $A_1, A_2, \dots, A_n$ в данном испытании образуют **полную группу событий**, если они несовместны и в результате испытания непременно произойдет хотя бы одно из них. Таким образом, их сумма является достовер-

ным событием: $\bigcup A_i = \Omega$.

Определение 19. События A и $\bar{A}$ называются *противоположными*, если они несовместны и образуют полную группу событий.

Пример 1.1. Партия деталей состоит из деталей 1-го, 2-го и 3-го сорта, а также бракованных. Детали перемешали. Из партии наудачу берут одну деталь. Рассмотрим следующие события: 1) взятая деталь окажется первого или второго сорта — $A_1 = \{1, 2\}$; 2) взятая деталь окажется первого или третьего сорта — $A_2 = \{1, 3\}$; 3) взятая деталь окажется второго или третьего сорта — $B_2 = \{2, 3\}$; 4) взятая деталь окажется второго сорта или бракованная — $B_1 = \{2, \text{бр}\}$. Какое из событий B_i образует с событиями A_1 и A_2 полную группу событий?

Решение. В соответствии с определением полной группы событий должно выполняться соотношение $A_1 \cup A_2 \cup B_i = \Omega$. Достоверному событию соответствует все пространство элементарных событий Ω .

В рассматриваемом испытании пространство Ω состоит из четырех элементарных событий: деталь может быть 1-го, 2-го, 3-го сорта или бракованной, т.е. $\Omega = \{1, 2, 3, \text{бр}\}$. Найдем множество элементарных событий для суммы событий A_1 и A_2 . В объединение множеств элементарных событий включают элементарные события, входящие в каждое из множеств, причем одинаковые элементарные события включают один раз. Таким образом, $A_1 \cup A_2 = \{1, 2, 3\}$. Для того чтобы дополнить это множество до Ω нужно добавить к сумме событий A_1 и A_2 событие B_2 , поскольку множество его элементарных событий содержит бракованные изделия.

Примеры для самостоятельного решения

2.1. Партия состоит из стандартных и нестандартных деталей, которые тщательно перемешаны. Наудачу берут две детали. Определить

- 1) пространство элементарных событий;
- 2) множества элементарных событий для следующих событий:
 - а) A_1 — появление одной стандартной и одной нестандартной детали;

б) A_2 — появление не менее одной стандартной детали;

в) A_3 — появление не более одной стандартной детали.

2.2. Из ящика, в котором есть бронзовые, латунные, медные и стальные детали, берут одну деталь. События A_1, A_2, A_3, A_4 означают, что взятая деталь является бронзовой, латунной, медной, стальной. Определить событие $B = (A_1 \cup \bar{A}_3) \cap (\bar{A}_4 \cup A_2)$.

2.3. Работник изготовил n деталей. Пусть событие $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ состоит в том, что i -тая деталь имеет дефект. Записать такие события:

1) ни одна из деталей не имеет дефектов;

2) хотя бы одна деталь имеет дефект;

3) только одна деталь имеет дефект.

2.4. Подбрасывается игральный кубик. Рассмотрим события: $A_1 = \{1; 2; 4\}$, $A_2 = \{3; 4; 6\}$, $A_3 = \{4; 5; 6\}$, состоящие в выпадении соответствующего числа очков при трех бросках игральной кости. Будут ли несовместными события: $B_1 = A_1 \cap \bar{A}_3$ и $B_2 = \bar{A}_1 \cap A_2$?

2.5. На прямоугольном 5×4 клетки поле, путем штрихования клеток рисуется некоторая фигура. Пусть $A_{ij} (i = 1, 2, 3, 4, 5; j = 1, 2, 3, 4)$ — события, которые состоят в том, что клетка с номером i, j заштрихована. Записать события:

1) изображение имеет вид, приведенный на рис. 1.1;

2) в правом верхнем углу заштрихован прямоугольник размером 3×2 клетки.

Рис. 1.1.

2.6. Сколько событий можно образовать в пространстве элементарных собы-

тий Ω , которое содержит 8 элементарных событий, если событие состоит не менее чем из двух элементарных событий?

1.3. Определение вероятности события. Непосредственное вычисление вероятностей

Вероятностью случайного события A называется отношение количества элементарных событий m , которые благоприятны появлению этого события (составляют множество ее элементарных событий), к общему количеству n равновозможных элементарных событий, которые образуют пространство элементарных событий Ω :

$$P = \frac{m}{n}.$$

Для вычисления вероятности события A по этой формуле, нужно найти количество элементарных событий в пространстве Ω , а также их количество в множестве элементарных событий, которое соответствует событию A .

Запомните!

1. Вероятность достоверного события $P(U) = 1$.
2. Вероятность невозможного события $P(V) = 0$.
3. Вероятность любого случайного события $0 < P(A) < 1$.

Пример 1.2. Партия состоит из 10 стандартных (С) и 5 нестандартных (Н) деталей. Из партии наудачу берут 5 деталей. Найти вероятность того, что среди взятых деталей 3 будут стандартными.

Решение. Событие A — «среди 5 деталей 3 стандартные, а 2 нестандартные». Детали берутся наудачу, поэтому возможным элементарным событием будет любая группа из 5 деталей, выбранных из 15 деталей. Для того чтобы определить к какому типу подмножеств принадлежат эти группы, рассмотрим одну из них. Пусть в группе оказалось 2 стандартных и 3 нестандартных детали. Произведем в группе произвольную перестановку. Группа не изменилась — в ней как было, так и осталось 2 стандартных детали, т.е. порядок элементов в группе не важен, поэтому эти группы являются сочетаниями. Все элементарные события равно-

возможные, для вычисления вероятности воспользуемся классическим определением вероятности.

Общее количество элементарных событий

$$n = C_{15}^5 = \frac{15!}{5!10!} = \frac{360360}{120} = 3003.$$

Чтобы вычислить количество элементарных событий, благоприятных появлению события A , рассуждаем следующим образом: 3 стандартных детали из 10 можно выбрать C_{10}^3 способами, а 2 нестандартных из 5 — C_5^2 способами. Таким образом,

$$m = C_{10}^3 C_5^2 = 120 \cdot 10 = 1200.$$

Окончательно получим: $P(A) = \frac{1200}{3003} \approx 0,4$.

Пример 1.3. За смену приемщик принял в ремонт 10 часов одной и той же марки от 10 разных клиентов и перед окончанием смены произвольно разложил их на круглой полке. Найти вероятность того, что трое часов, которые принадлежат определенным клиентам, оказались рядом.

Решение. Событие A — «трое часов, которые принадлежат определенным клиентам, оказались рядом». Все 10 часов размещены в произвольном порядке. Таким образом, возможное элементарное событие — перестановки. Общее количество элементарных событий равно количеству перестановок из 10 элементов. Все они равновозможны и несовместны. Поэтому можно использовать классическое определение вероятности. Исходя из сказанного $n=10!$. Для вычисления m , объединим 3 часа определенных клиентов в одну группу. Тогда для события A будет $7!$ перестановок среди 7 часов, которые остались; $3!$ перестановок будет в группе выбранных 3 часов, кроме того, группа из 3 часов может быть размещена в любом из 8 промежутков между 7 оставшимися часами. Таким образом, $m=7!3!8$:

$$P(A) = \frac{7!3!8}{10!} \approx 0,067.$$

Примеры для самостоятельного решения

3.1. Партия из 10 деталей содержит 4 бракованных. Найти вероятность того, что из наудачу взятых двух деталей будут:

- 1) две стандартных;
- 2) две бракованных;
- 3) 1 стандартная и 1 бракованная.

3.2. Партия состоит из 20 изделий, из которых 8 изделий 1-го сорта, 6 — 2-го, 2 — 3-го сорта, а остальные — бракованные. Наудачу берут 4 изделия. Найти вероятность того, что среди них окажется 2 изделия 1-го сорта, 1 — 2-го сорта и 1 бракованное.

3.3. Пусть наудачу взятый телефонный номер состоит из 6 цифр. Найти вероятность того, что в нём все цифры разные.

3.4. На книжной полке произвольным образом расставлены 8 томов собрания сочинений. Найти вероятность того, что в результате I, II и III тома будут стоять рядом.

3.5. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня только, что они разные, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набранный номер правильный.

3.6. В лотерее на каждые 500 билетов разыгрывается 100 вещевых и 50 денежных выигрышей. Найти вероятность выигрыша для владельца одного билета.

3.7. На складе находятся 10 кинескопов завода № 1 и 8 кинескопов завода № 2. Наудачу взяли 4 кинескопа. Найти вероятность того, что среди них 2 кинескопа завода № 1 и 2 кинескопа завода № 2.

3.8. Партия электролампочек состоит из 10 годных и 5 бракованных. Из партии наудачу по одной берут все лампочки. Найти вероятность того, что последней будет взята годная.

3.9. В партии из 16 деталей 4 нестандартные. Наудачу с возвращением берут 3 детали. Найти вероятность того, что среди них 2 детали будут стандартными.

3.10. Восемь человек в произвольном порядке садятся за круглый стол. Найти вероятность того, что трое товарищей окажутся рядом.

3.11. Из букв разрезанного русского алфавита было составлено слово «АНА-НАС», а затем все буквы бросили в урну и тщательно перемешали. Найти вероятность того, что, беря буквы одну за одной и выкладывая их подряд, снова получим это же слово.

3.12. Набор номера, состоящего из 3 цифр, выигрышной облигации выполняют трехразовым доставанием из урны одного за одним трёх жетонов из пяти, пронумерованных цифрами от 1 до 5. Найти вероятность того, что выбранный номер содержит цифру 3.

3.13. Два друга договорились встретиться с 11 до 12 часов, а также о том, что тот, кто придет первым, ждет другого не более 20 минут, после чего уходит. Найти вероятность того, что они встретятся, если каждый может прийти в назначенное место в произвольный момент времени между 11-тью и 12-тью часами.

3.14. Отдел технического контроля случайным образом отобрал 200 единиц готовой продукции и обнаружил среди них 12 единиц, которые не соответствуют стандарту. Определить относительные частоты появления бракованной и стандартной единиц продукции, если наудачу берут одну единицу продукции.

3.15. В магазине на протяжении месяца исследуется частота спроса на мужские костюмы по размерам. Результаты исследования сгруппированы и представлены в таблице:

Размер	46	48	50	52	54	56
Частота	110	250	380	460	340	180

Найти относительную частоту спроса по размерам.

3.16. На каждые 25 отштампованных заготовок станок-автомат дает в среднем 3 нестандартных. Вычислить приблизительно, сколько нужно сделать заготовок, чтобы получить 50 стандартных.

1.4. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теоремы сложения вероятностей

Пусть событие A является сумой двух событий B и C . Тогда:

а) если события B и C несовместны, то

$$P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C);$$

б) если события B и C совместны, то

$$P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C).$$

Определение 20. События B и C **зависимы**, если вероятность одного из них зависит от того, произошло другое событие или нет. В противном случае события называются **независимыми**. Вероятность события C , вычисленная при условии, что событие B произошло, называется **условной вероятностью** и обозначается $P(C/B)$.

Теоремы умножения вероятностей

Пусть событие A является произведением двух событий B и C . Тогда:

а) если события B и C независимые, то $P(A) = P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$;

б) если события B и C зависимые, то $P(A) = P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C/B)$.

Эти теоремы справедливы и для произведения n ($n > 2$) событий.

Вероятность наступления хотя бы одного события

Пусть в результате испытания могут произойти n событий $A_1, A_2, \dots, A_n$. Требуется найти вероятность того, что произойдет хотя бы одно из них. Обозначим это событие буквой A . Тогда противоположным будет событие $\bar{A}$ состоящее в том, что в результате испытания событие A не произойдет. Найдем вероятность события A через вероятность противоположного события:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

Пример 1.4. Партия содержит 12 стандартных и 4 нестандартных детали. Наудачу берут 3 детали. Найти вероятность того, что среди взятых деталей:

- 1) не менее двух стандартных;
- 2) все 3 нестандартные;

3) хотя бы одна стандартная.

Решение. 1) Пусть событие A — «среди трех взятых деталей не менее двух стандартные». Тогда его можно представить как сумму двух событий: A_1 — «среди трех взятых деталей две стандартные и одна нестандартная» и A_2 — «все три детали стандартные». События A_1 и A_2 несовместны, поэтому:

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2).$$

Вероятность событий A_1 и A_2 найдем согласно классическому определению вероятности:

$$n = C_{16}^3 = 560; \quad m_1 = C_{12}^2 \cdot C_4^1 = 66 \cdot 4 = 264 \quad m_2 = C_{12}^3 = 220.$$

Таким образом,

$$P(A) = \frac{264}{560} + \frac{220}{560} = \frac{484}{560} \approx 0,864.$$

2) Событие B — «все три детали нестандартные». Это событие можно представить как произведение трех событий B_k ($k = 1, 2, 3$) где k -тая деталь нестандартна, $B = \bigcap_{k=1}^3 B_k$. В условии задачи не сказано, что детали берутся с возвращением.

Таким образом, взять три детали — это то же самое, что брать их по одной без возвращения, а, следовательно, события зависимые. Следовательно вероятность события B равна:

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(\bigcap B_k\right) = P(B_1) \cdot P(B_2 / B_1) \cdot P(B_3 / B_1 B_2) \\ &= \frac{4}{16} \cdot \frac{3}{13} \cdot \frac{2}{12} \approx 0,007. \end{aligned}$$

3) Событие C — «из трех деталей хотя бы одна стандартная». Противоположное событие $\bar{C}$ — «все три детали нестандартные». Вероятность этого события вычислена в предыдущем пункте: $P(\bar{C}) = P(B)$. Окончательно имеем:

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) \approx 1 - 0,007 = 0,993.$$

Пример 1.5. Имеется 3 партии деталей. Первая партия состоит из 10 стандартных и 8 нестандартных деталей, вторая — из 15 стандартных и 4 нестандартных, третья — из 20 стандартных и 5 нестандартных деталей. Из каждой

партии берут по одной детали. Найти вероятность того, что среди взятых деталей:

- 1) только одна стандартная;
- 2) только две стандартных.

Решение. Пусть из каждой партии взято по одной детали. При этом могут произойти события A_1, A_2, A_3 , которые состоят в том, что деталь, взятая из первой, второй и третьей партии, соответственно, оказалась стандартной.

1) Событие A — «только одна из трех деталей оказалась стандартной». Это событие можно представить следующим образом: $A = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$. Группы событий, суммой которых является событие A , несовместны, а события в каждой группе независимы. Следовательно вероятность события A вычисляется:

$$P(A) = \frac{10}{13} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{13} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{1}{5} + \frac{3}{13} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{4}{5} = \frac{133}{1235} \approx 0,108.$$

2) Событие B — «только две детали из трех оказались стандартными». Представим это событие через события A_1, A_2, A_3 и события противоположные им:

$$B = A_1 A_2 \bar{A}_3 \cup A_1 \bar{A}_2 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2 A_3.$$

Событие B представлено как сумма несовместных групп событий. В каждой группе события независимы. Найдем вероятность события B :

$$P(B) = \frac{10}{13} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{1}{5} + \frac{10}{13} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{13} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{4}{5} = \frac{490}{1235} \approx 0,397.$$

Примеры для самостоятельного решения

4.1. В партии из 20 деталей 15 стандартных, а остальные нестандартные. Наудачу берут 4 детали. Найти вероятность того, что среди них:

- 1) не более двух нестандартные;
- 2) все 4 стандартные;
- 3) хотя бы одна нестандартная.

4.2. В цехе из восьми остановок станка в среднем четыре обусловлены заменой резца; две — несвоевременной поставкой заготовок; остальные — другими

причинами. Найти вероятность остановки станка по другим причинам.

4.3. В случае массового изготовления изделий брак составляет в среднем 1,5 % общего количества всех изделий. Среди годных изделий 85,3 % изделий 1-го сорта. Найти вероятность того, что наудачу взятое изделие 1-го сорта.

4.4. Доказать, что произведение вероятностей противоположных событий не превышает 0,25.

4.5. Партия состоит из двух деталей 1-го сорта, двух 2-го сорта и трех — 3-го сорта. Детали берут по одной наудачу без возвращения. Найти вероятность того, что деталь 1-го сорта появится раньше чем деталь 3-го сорта.

4.6. В цеху есть три резервных мотора, для каждого из которых вероятность быть включенным в данный момент равна 0,3. Найти вероятность того, что в данный момент включено:

- 1) хотя бы два мотора;
- 2) хотя бы один мотор.

4.7. Из партии деталей товаровед выбирает детали высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятая деталь будет высшего сорта, равна 0,7. Найти вероятность того, что из трех деталей только две будут 1-го сорта.

4.8. От аэровокзала отправились два автобуса. Вероятность своевременного прибытия каждого из них равна 0,92. Найти вероятности следующих событий:

- A* — оба автобуса придут своевременно;
B — оба автобуса опоздают;
C — только один автобус придет своевременно.

4.9. Имеется две партии деталей. В первой партии 7 годных и 3 бракованные детали. Во второй — 10 годных и 4 бракованных. Из каждой партии наудачу берут по одной детали. Найти вероятность следующих событий:

- 1) обе детали годные;
- 2) обе детали бракованные;
- 3) одна деталь годная, а вторая бракованная.

4.10. Учет использования запасных деталей показал, что в случае ремонта двигателя деталь № 1 заменялась в среднем в 35 % случаев, деталь № 2 — в 30 % случаев, а обе детали одновременно заменялись в 28 % случаев. Найти ве-

роятность того, что в двигателе, который поступил для ремонта, будет заменена деталь № 2 при условии, что деталь № 1 уже заменяли, и наоборот.

4.11. Проверка партии риса, расфасованного по 0,5 кг, дала такие результаты: 20 % всех пачек были по 498 г, 60 % — по 500 г, 20 % — по 502 г. Из партии наудачу взяли две пачки. Найти вероятность следующих событий:

- 1) обе пачки имеют одинаковую массу;
- 2) общая масса пачек отклоняется от 1 кг на 4 г.

4.12. Отдел технического контроля проверяет изделие на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартное, равна 0,95. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартное.

1.5. Формула полной вероятности и формула Байеса

Пусть событие A может произойти только при условии наступления одного из несовместных событий B_i ($i = 1, 2, \dots, n$), которые образуют полную группу. Тогда вероятность события A находится по формуле:

$$P(A) = \sum_k^n P(B_k) \cdot P(A/B_k).$$

Где $P(B_k)$ — вероятность события B_k , $P(A/B_k)$ — условные вероятности наступления события A .

Приведенная зависимость называется **формулой полной вероятности**.

Опять рассмотрим события B_k ($k=1,2,3..$) которые образуют полную группу событий и попарно несовместны. Эти события будем называть **гипотезами**. Событие A может произойти одновременно с некоторым из событий B_k . Известны вероятности событий B_k и условные вероятности того, что событие A произойдет. Известно, что в результате испытания событие A произошло. Требуется при этих условиях переоценить вероятности гипотез B_k . Для этого пользуются формулой Байеса:

$$P(B_k / A) = \frac{P(B_k)P(A/B_k)}{\sum P(B_k)P(A/B_k)}, k=1,2,3,\dots$$

Пример 1.6. На двух станках-автоматах изготавливают одинаковые детали,

которые поступают на транспортер. Продуктивность первого станка в три раза больше, чем второго, причем первый станок изготавливает нестандартную деталь с вероятностью 0,15, а второй — с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что наудачу взятая с транспортера деталь будет стандартной.

Решение. Рассмотрим события: B_1 — «деталь изготовлена на первом станке»; B_2 — «деталь изготовлена на втором станке»; A — «выбранная деталь стандартная». События B_1 и B_2 несовместны и образуют полную группу, событие A может происходить одновременно с каждым из этих событий. Условные вероятности наступления события A известны. Исходя из условия, что продуктивность первого станка в три раза больше, чем второго, находим $P(B_1)=0,75$, $P(B_2)=0,25$.

По формуле полной вероятности имеем:

$$P(A)=0,75 \cdot 0,85 + 0,25 \cdot 0,8 = 0,8375.$$

Пример 1.7. Партию изготовленных деталей проверяли два контролера. Первый проверил 45 %, а второй — 55 % деталей. Вероятность допустить ошибку при проверке для первого контролера составляет 0,15, для второго — 0,1. После дополнительной проверки в партии принятых деталей выявлено бракованную. Оценить вероятность ошибки для каждого контролера.

Решение. Рассмотрим события: B_1 — «деталь проверял первый контролер»; B_2 — «деталь проверял второй контролер»; A — «выявлена бракованная деталь». События B_1 и B_2 несовместные и образуют полную группу. Событие A произошло одновременно с одним из этих событий, вероятности которых требуется переоценить. Применим формулу Байеса.

$$P(B_1 / A) = \frac{P(B_1)P(A / B_1)}{\sum P(B_k)P(A / B_k)} = \frac{0,45 \cdot 0,15}{0,45 \cdot 0,15 + 0,55 \cdot 0,1} \approx 0,551;$$

$$P(B_2 / A) = 1 - P(B_1 / A) = 1 - 0,551 = 0,449.$$

Таким образом, вероятность, что ошибку допустил первый контролер, больше.

Примеры для самостоятельного решения

5.1. На двух станках-автоматах изготавливаются одинаковые заготовки. Производительность второго станка в 1,5 раза больше, чем первого. Первый станок дает 5 % нестандартных заготовок, а второй — 93 % стандартных. Найти вероятность того, что взятая наудачу заготовка будет:

- 1) стандартной; 2) нестандартной.

5.2. На конвейер поступают детали с трех автоматов. Первый дает 90 %, второй — 93 %, а третий — 95 % годной продукции. За смену первый автомат изготавливает 60, второй — 50, а третий — 40 деталей. Найти вероятность поступления на конвейер:

- 1) нестандартной детали; 2) стандартной детали.

5.3. На складе хранятся кинескопы, 70 % которых изготовлены на заводе № 1, а остальные — на заводе № 2. Вероятность того, что кинескоп проработает гарантийный срок, равна 0,9 для завода № 2 и 0,8 для завода № 1. Найти вероятность того, что наудачу взятый кинескоп:

- 1) не проработает гарантийный срок; 2) проработает гарантийный срок.

5.4. Имеется две партии деталей. Первая состоит из 15 стандартных и 4 нестандартных, вторая — из 10 стандартных и 3 нестандартных. Из первой партии берется одна деталь и перекладывается во вторую. Найти вероятность того, что деталь, которую после этого взяли из второй партии:

- 1) стандартная; 2) нестандартная.

5.5. Имеется три партии деталей. Первая состоит из 10 стандартных и 4 нестандартных, вторая — из 14 стандартных и 4 нестандартных, третья — из 16 стандартных и 5 нестандартных деталей. Из наудачу выбранной партии берется деталь. Найти вероятность того, что деталь будет:

- 1) стандартной; 2) нестандартной.

5.6. Металлические заготовки для дальнейшей обработки поступают из двух цехов: 55% из первого, 45% из второго. При этом продукция из первого цеха содержит 3%, а из второго цеха — 5 % брака. Найти вероятность того, что заготовка, которая поступила на обработку:

1) годная; 2) бракованная.

5.7. На склад поступает продукция от двух предприятий. От первого — 60%, от второго — 40%. Первое предприятие дает 80% продукции 1-го сорта и 20% 2-го сорта, а второе дает 70% продукции 1-го сорта и 30% 2-го сорта. Найти вероятность того, что наудачу взятая единица продукции будет:

1) первого сорта; 2) второго сорта.

5.8. Для посева пшеницы заготовлены семена, среди которых 95% 1-го сорта, 3% 2-го и 2% 3-го сорта. Вероятность того, что из семечка вырастет колосок, в котором не менее 50 зерен, для 1-го сорта составляет 0,5, для 2-го сорта — 0,2, для 3-го — 0,1. Найти вероятность того, что наудачу взятый колосок в случае посева этих семян будет иметь не менее 50 зерен.

5.9. Партия состоит из 10 стандартных и 5 нестандартных деталей. Из партии наудачу взяли деталь и без обследования отложили в сторону. Найти вероятность того, что произвольно взятая после этого из партии деталь будет стандартной.

5.10. Детали на конвейер поступают из двух автоматов. От первого — 60%, от второго — 40%. Первый автомат дает 2%, а второй — 1% брака. Деталь, которая поступила на конвейер, оказалась стандартной. Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена:

1) первым автоматом; 2) вторым автоматом.

5.11. Имеется три партии одинаковых деталей. В первой 20 стандартных и 5 нестандартных, во второй — 15 стандартных и 3 нестандартных, в третьей — 14 стандартных и 2 нестандартных детали. Из наудачу выбранной партии взяли деталь. Она оказалась стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь взяли:

1) из первой партии; 2) из второй партии; 3) из третьей партии.

5.12. Имеется две партии одинаковых изделий. Первая состоит из 10 изделий завода № 1 и 5 изделий завода № 2. Во второй партии 15 изделий завода № 1 и 6 — завода № 2. Из наудачу выбранной партии взяли одно изделие, которое оказалось изготовленным на заводе № 1. После этого испытание повторили. Найти вероятность того, что второе взятое изделие изготовлено на заводе № 2.

1.6. Схема испытаний с повторениями

Независимые испытания

Пусть проводятся n испытаний, в каждом из которых событие A может как произойти, так и не произойти. Если вероятность появления события A в каждом испытании не зависит от того, появилось оно или нет в остальных, то такие испытания называются **независимыми по отношению к событию A** . В соответствии с определением испытания также независимые, если в каждом из них вероятность наступления события A одинакова, т.е. равна одному и тому же числу. Вероятность того, что событие A произойдет в каждом из независимых испытаний, обозначают $P(A)=p$ а вероятность наступления противоположного события $P(\bar{A})=1 - p = q$. Для решения задач на повторные независимые испытания используются следующие формулы и теоремы.

1. Формула Бернулли. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность $P(A) = p$, событие A произойдет m раз, равна:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^n.$$

Формула применяется при $n \leq 10$.

2. Наивероятнейшее количество. Частота m_0 наступления события A в n независимых повторных испытаниях называется **наивероятнейшим количеством** (появления этого события), если ей соответствует наибольшая вероятность. Оно определяется по формуле:

$$np - q \leq m_0 \leq np + p.$$

Распределение может иметь одно или два наивероятнейших числа.

3. Локальная теорема Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых $P(A) = p$, событие A происходит m раз, приближенно вычисляется по следующей формуле:

$$P(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \text{ где } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Локальная теорема Лапласа дает возможность вычислять вероятности $P_n(m)$, при $n > 10$ и $p > 0,1$.

4. Формула Пуассона. Если в каждом из n независимых повторных испытаний $P(A) = p$ и $0 \leq p \leq 1$, а n велико, то

$$P_n(m) \approx \frac{a^m}{m!} e^{-a}, a = np.$$

5. Интегральная теорема Лапласа. Вероятность того, что событие A произойдет от m_1 до m_2 раз при проведении n независимых испытаний, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью p , вычисляется по формуле:

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{n^2}{2}} dn$ — функция Лапласа;

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения функции Лапласа находятся по специальным таблицам.

6. Отклонение относительной частоты от вероятности. Вероятность того, что при проведении n независимых испытаний отклонение относительной частоты события A от ее вероятности по модулю не превышает ε , вычисляется по формуле:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Пример 1.8. Из партии, в которой 12 стандартных и 4 нестандартных детали, наудачу берут 3 детали с возвращением. Найти вероятность того, что среди взятых деталей:

- 1) все три стандартные;
- 2) не более чем одна нестандартная;
- 3) хотя бы одна нестандартная.

Решение. Имеем схему трех независимых испытаний. Пусть событие A —

«взятая деталь стандартная», тогда $P(A)=p=12/16=0,75$. Искомые вероятности вычисляем по формуле Бернулли:

$$1) P_3(3) = C_3^3 p^3 q^0 = 0,75^3 = 0,421875.$$

2) Событие «из трех деталей не более чем одна нестандартная» можно представить в виде двух событий: взяли 3 стандартные детали или 2 стандартные и одну нестандартную деталь:

$$\begin{aligned} P_3(m \geq 2) &= P_3(3) + P_3(2) \\ &= 0,421875 + C_3^2 \cdot 0,75^2 \cdot 0,25 = 0,84375. \end{aligned}$$

3) Противоположным для данного будет событие «все три детали стандартные». Вычислим искомую вероятность:

$$P_3(m < 3) = 1 - P_3(3) = 1 - 0,421875 = 0,578125.$$

Пример 1.9. Доля длинных волокон в партии хлопка составляет в среднем 0,6 от общего количества волокон. Сколько нужно взять волокон, чтобы наивероятнейшее число длинных волокон среди них равнялось 40?

Решение. Используем формулу, по которой определяются наивероятнейшее число: $np - q \leq m_0 \leq np + p$. Подставим сюда значения известных величин:

$$0,6n - 0,4 \leq 40 \leq 0,6n + 0,6;$$

$$\frac{39,4}{0,6} \leq n \leq \frac{40,4}{0,6}; 65,7 \leq n \leq 67,3.$$

Решением будут два значения: $n = 66$ и $n = 67$.

Пример 1.10. На каждые 40 отштампованных изделий в среднем приходится 4 дефектных. Из всей продукции наудачу взяли 400 изделий. Найти вероятность того, что среди них 350 изделий будут без дефектов.

Решение. Событие A — «взятое изделие без дефекта». По условию $P(A) = p = 0,9$. Проведено $n = 400$ независимых испытаний. Для решения задачи используем формулу локальной теоремы Лапласа. Подставляя данные задачи, получим:

$$x = \frac{350 - 400 \cdot 0,9}{\sqrt{400 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} \approx -1,67.$$

Из таблиц находим $\varphi(-1,67) = 0,0989$, учитывая, что $\varphi(x)$ — четная функция.

Окончательно: $P_{400}(50) \approx \frac{0,0989}{6} \approx 0,0165$.

Пример 1.11. Завод отправил на базу 1000 качественных изделий. За время перевозки каждое изделие может быть повреждено с вероятностью 0,003. Найти вероятность того, что на базу придут 3 поврежденных изделия.

Решение. Если событие A — «изделие повреждено», то его вероятность $p = 0,003$. Рассматривается схема независимых испытаний, $n = 1000$. Вероятность события A достаточно мала, поэтому задачу решаем по формуле Пуассона. Произведя вычисления, находим:

$$a = np = 1000 \cdot 0,003 = 3 \quad P_{1000}(3) \approx \frac{3^3}{3!} e^{-3} \approx 0,229.$$

Пример 1.12. Зерна пшеницы прорастают с вероятностью 0,95. Найти вероятность того, что из 2000 посеянных зерен взойдет от 880 до 1920.

Решение. Событие A — «зерно пшеницы взошло». Его вероятность $p = 0,95$, количество независимых испытаний $n = 2000$. Используем формулу интегральной теоремы Лапласа.

Далее вычисляем:

$$x_1 = \frac{1880 - 2000 \cdot 0,95}{\sqrt{2000 \cdot 0,95 \cdot 0,05}} \approx -1,03 \quad x_2 = \frac{1920 - 2000 \cdot 0,95}{\sqrt{2000 \cdot 0,95 \cdot 0,05}} \approx 2,06;$$

$$P_{2000}(1880; 1920) \approx \Phi(2,06) - \Phi(-1,03) = \Phi(2,06) + \Phi(1,03) \\ = 0,4803 + 0,3485 = 0,8288.$$

Значения функции Лапласа берутся из соответствующей таблицы.

Примеры для самостоятельного решения

6.1. На каждые 30 штампованных изделий в среднем приходится 6 изделий с дефектом. Найти вероятность того, что из 5 наудачу взятых изделий 3 окажутся без дефекта.

6.2. Детали 2-го сорта составляют $\frac{2}{3}$ всех деталей, которые находятся в партии. Найти вероятность того, что из 4 наудачу взятых деталей 3 окажутся 2-го сорта.

6.3. Доля 3-го сорта составляет в некоторой массовой продукции в среднем 20%. Найти вероятность того, что из 5 взятых образцов продукции не менее трех будут 3-го сорта.

6.4. В партии, состоящей из изделий двух сортов, изделий 2-го сорта в 1,5 раза больше, чем 1-го. Найти вероятность того, что среди трех наудачу взятых изделий хотя бы одно будет 1-го сорта.

6.5. Вероятность выигрыша облигации составляет 0,6. Куплено 5 облигаций. Найти вероятность следующих событий:

- 1) выиграют две облигации;
- 2) выигрыш выпадет хотя бы на одну облигацию;
- 3) выиграют не более двух облигаций.

6.6. За один цикл автомат изготавливает 10 деталей. За сколько циклов вероятность изготовления хотя бы одной бракованной детали будет не меньше чем 0,8, если вероятность изготовления бракованной детали для автомата составляет 0,01?

6.7. Для обеспечения работы на некотором строительном объекте автопредприятия имеет 6 автомобилей. Вероятность выхода каждого автомобиля на линию в первую смену равна 0,8. Найти вероятность нормальной работы автопредприятия, если для этого в первую смену нужно иметь на линии не менее чем 4 автомобиля.

6.8. Автомат штампует изделия 1-го сорта с вероятностью 0,6. Сколько изделий должно содержаться в партии, чтобы наивероятнейшее количество изделий 1-го сорта составило 55?

6.9. Промтоварная база обслуживает 8 магазинов. Заявки на товар на следующий день могут поступать от каждого магазина с вероятностью 0,6. Найти наивероятнейшее количество заявок, которые могут поступать на базу ежедневно, а также вероятность поступления такого количества заявок.

6.10. Найти наивероятнейшее количество остановок прядильного станка на протяжении часа работы, если среднее количество остановок за каждые 12 мин. равно 4.

6.11. Какую долю (в процентах) изделий 1-го сорта должен производить ав-

томат, чтобы в партии из 100 наудачу взятых изделий наивероятнейшее количество изделий 1-го сорта равнялось 80?

6.12. Доля 2-го сорта некоторой массовой продукции в среднем составляет 20%. Наудачу взяли 100 образцов этой продукции. Какое количество изделий 2-го сорта в образовавшейся группе наивероятнейшее и какова вероятность того, что в этой группе будет именно такое количество изделий 2-го сорта?

6.13. Доля заготовок с отклонениями от установленного стандарта при обтачивании таких заготовок составляет в среднем 0,11 всего количества обточенных заготовок. Найти вероятность того, что из 70 обточенных заготовок 62 соответствуют стандарту.

6.14. Стандартных деталей автомат штампует в 5 раз больше, чем нестандартных. Наудачу выбрали 200 деталей. Найти вероятность того, что среди них 30 деталей нестандартные.

6.15. Найти вероятность остановки 20 станков из 80 работающих, если вероятность остановки каждого станка составляет 0,8.

6.16. Посевной фонд содержит 92% семян 1-го сорта. Наудачу взяли 150 зерен. Найти вероятность того, что среди них 140 зерен 1-го сорта.

6.17. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нитки на одном веретене в течение 1 мин. равна 0,005. Найти вероятность того, что в течение 1 мин. будет обрыв нитки на двух веретенах.

6.18. В банк поступило 5000 пачек денежных знаков. Вероятность того, что пачка неправильно укомплектована, равна 0,0004. Найти вероятность того, что среди поступивших пачек будет не более чем одна укомплектованная неправильно.

6.19 Устройство состоит из 2000 элементов, которые работают независимо один от другого. Вероятность отказа каждого элемента равна 0,002. Найти вероятность отказа хотя бы одного элемента.

6.20. Вероятность того, что во время сортировки стеклянное изделие будет разбито, равна 0,002. Найти вероятность того, что из 1500 изделий при сортировке будет разбито 4.

Раздел II. Случайные величины

2.1. Законы распределения и числовые характеристики случайных величин

Случайной называется величина, которая может принимать разные числовые значения. Более строгое определение случайной величины связано с понятием пространства элементарных событий. Пусть задано пространство элементарных событий Ω . Однозначная числовая функция $X = f(\Omega)$, заданная на пространстве элементарных событий, называется **случайной величиной**. Если пространство Ω дискретное, то случайная величина **дискретная**. Непрерывному пространству элементарных событий соответствует **непрерывная случайная величина**.

Соотношение между значениями случайной величины и их вероятностями называется **законом распределения случайной величины**.

Для дискретных случайных величин законы распределения могут задаваться множеством значений случайной величины и вероятностями этих значений.

Если $p_i = P(X = x_i)$, то $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, или, если множество значений случайной величины бесконечно, то $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Законы распределения дискретных случайных величин задаются в табличной форме (значения случайной величины и их вероятности), аналитической (приводится формула, по которой вычисляются вероятности для заданных значений случайной величины), графической (в прямоугольной системе координат задается набор точек $(x_i; p_i)$; соединив точки отрезками прямых, получим многоугольник распределения вероятностей). Универсальным способом задания закона распределения вероятностей является **функция распределения** $F(x) = P(X < x)$. Для дискретных величин $F(x) = \sum_{x_i < x} p(x_i)$.

Функция распределения — неубывающая, непрерывная слева,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$. Для любых α и β

$$P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Если X — непрерывная случайная величина, то $F(x)$ — непрерывная и диф-

ференцируемая; ее производная $f(x) = F'(x)$ называется **плотностью распределения вероятностей**. При этом $f(x)$ — неотрицательная функция, для которой

$$P(\alpha \leq X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1; \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Математическим ожиданием, или средним значением, MX случайной величины, называется ряд $\sum_i x_i p_i$ (для дискретных случайных величин) и инте-

грал $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$ (для непрерывных случайных величин), если они абсолютно

сходящиеся. Математическое ожидание имеет следующие свойства:

- 1) $MC = C$ (C — константа);
- 2) $MCX = CMX$;
- 3) $M(X + Y) = MX + MY$;
- 4) $MX Y = MX \cdot MY$, Если X и Y — независимые случайные величины.

Дисперсия (обозначается через DX) случайной величины X определяется формулой:

$$DX = M(X - MX)^2 = MX^2 - (MX)^2.$$

Основные свойства дисперсии:

- 1) $DC = 0$;
- 2) $DCX = C^2 DX$;
- 3) $D(X + Y) = DX + DY$, Если случайные величины независимые.

Среднее квадратическое отклонение (обозначается буквой σ) находится как корень квадратный из дисперсии.

Если из случайной величины вычесть ее математическое ожидание, то получим центрированную случайную величину, математическое ожидание которой равно нулю. Деление случайной величины на ее среднее квадратическое отклонение называется **нормированием** случайной величины.

Случайная величина $X^* = \frac{X - MX}{\sigma}$ имеет нулевое математическое ожидание и

единичную дисперсию.

Начальный, центральный и абсолютный начальный моменты порядка k величины X определяются, соответственно, следующими формулами:

$$\nu_k = MX^k, \mu_k = M(X - MX)^k, \alpha_k = M|X|^k.$$

Если существует начальный абсолютный момент порядка k , то существуют все моменты низших порядков.

Медианой (Me) случайной величины называется такое значение случайной величины, при котором $F(x) = 0,5$.

Мода дискретной случайной величины (MO) — это такое ее значение, вероятность которого наибольшая.

Модой непрерывного распределения является значение случайной величины, при котором плотность распределения имеет максимум.

Ассиметрия случайной величины вычисляется по формуле:

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Экссесс случайной величины вычисляется по формуле:

$$Ek = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Пример 2.1. Имеется 4 заготовки для изготовления деталей. Вероятность изготовления годной детали равна 0,75. Найти закон распределения случайной величины X — количество заготовок, которые будут использованы для изготовления годной детали. Найти MX , DX а также вероятность того, что из этих заготовок будет изготовлена стандартная деталь.

Решение. Запишем закон распределения для случайной величины X в табличной форме. Очевидно, что случайная величина может принимать значения 1, 2, 3, 4. Значение $X = 1$, если из первой заготовки изготовлена стандартная деталь, а вероятность этого равна 0,75. Случайная величина принимает значение 2, если из первой заготовки изготовлена бракованная деталь, а из второй — годная. По теореме умножения вероятностей вероятность этого события

$P(X = 2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$. Аналогично, $X = 3$, если детали, изготовленные из первой и второй заготовок, бракованные, а деталь, изготовленная из третьей заготовки — годная. $P(X = 3) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$. И, наконец, $X = 4$, если детали, изготовленные из первых трех заготовок, бракованные. $P(X = 4) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$. Запишем закон распределения:

x_i	1	2	3	4
$p(x_i)$	0,75	0,1875	0,046875	0,15625

Легко проверить, что сумма вероятностей в законе распределения равна 1. Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

$$MX = 1 \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{3}{16} + 3 \cdot \frac{3}{64} + 4 \cdot \frac{1}{64} = \frac{85}{64};$$

$$MX^2 = 1 \cdot \frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{3}{16} + 9 \cdot \frac{3}{64} + 16 \cdot \frac{1}{64} = \frac{139}{64};$$

$$DX = \frac{139}{64} - \left(\frac{85}{64}\right)^2 = \frac{1671}{4096}.$$

Если событие A — «из четырех заготовок изготовлена одна годная деталь», то

$$P(A) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{255}{256}.$$

Примеры для самостоятельного решения

2.1.1. Для изготовления деталей используются трубы длиной 4, 5 и 6 м. При этом половина труб поставляется длиной 6 м, а труб длины 4 и 5 м поступает

одинаковое количество. Найти закон распределения количества заготовок длиной 0,5 м, полученных из наудачу взятой трубы. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Решить эту задачу для случая, когда наудачу берут две трубы.

2.1.2. Вероятность того, что деталь, изготовленная станком-автоматом, будет 1-го сорта, равна 0,8. Работник периодически проверяет качество изготовленных деталей, но одновременно не более 4-х деталей. Если деталь 2-го сорта, то станок останавливают для регулировки. Найти закон распределения количества проверенных деталей в одной серии наблюдений. Найти математическое ожидание и дисперсию этой величины.

2.1.3. Вычислить цену лотерейного билета, при которой обеспечивается прибыль от лотереи, равная трети суммы, полученной от реализации билетов. Если на каждые 100 из них установлен один выигрыш в 100 руб., два — по 20 руб. и четыре — по 10 руб.

2.1.4. Задана функция $F(x) = a \sin x + b \cos x + 0,5$. Доказать, что если $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, то можно найти a и b , такие, что $F(x)$ — функция распределения вероятностей. Найти эти значения и плотность распределения $f(x)$.

2.1.5. Случайная величина X принимает значения на отрезке $[a; 2]$, где задана плотность ее распределения $f(x) = Ax^2$. Найти a , A , $F(x)$ и $D(x)$, если $MX = 0$.

2.1.6. Случайная величина X принимает значения на отрезке $[a; 2]$, $f(x) = \frac{3}{16} x^{n+1}$, $MX = 0$. Найти a и n ($n \in \mathbb{N}$).

2.2. Основные законы распределения вероятностей

В теории вероятностей часто используются некоторые законы распределения случайных величин. Рассмотрим эти распределения, а также задачи, при решении которых они используются.

1. Биномиальный закон распределения

Биномиальным называется распределение вероятностей, определяемых форму-

лой Бернулли

$$P(X = m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Биномиальный закон распределения справедлив для схемы независимых испытаний, в каждом из которых событие A наступает с вероятностью p . Частота наступления события A имеет биномиальный закон распределения. Числовые характеристики распределения:

$$MX = np, \quad DX = np(1 - p).$$

2. Закон распределения Пуассона

Дискретная случайная величина имеет распределение Пуассона, если она может принимать только целые неотрицательные значения ($m = 0, 1, 2, \dots$) с вероятностями

$$P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad (a > 0).$$

Это распределение описывает количество событий, наступающих в одинаковые промежутки времени при условии, что эти события происходят независимо одно от другого с постоянной интенсивностью. Распределение Пуассона рассматривается как: статистическая модель для количества альфа-частиц, излучаемых радиоактивным источником за определенный промежуток времени; количества вызовов, поступающих на телефонную станцию за определенный период суток; количества требований выплат страховых сумм за год; количества дефектов на одинаковых пробах вещества и др. Распределение применяется в задачах статистического контроля качества, в теории надежности, теории массового обслуживания. Математическое ожидание и дисперсия в этом распределении одинаковые и равны a . Для этого распределения составлены таблицы для разных значений a ($0,1 - 20$). В таблицах для соответствующих значений a приведены вероятности $P(X=m)$ и $P(X>m)$.

Если в схеме независимых повторных испытаний n велико и p или $1 - p$ стремятся к нулю, то биномиальное распределение аппроксимируется распределением Пуассона, при этом $a = np$.

3. Нормальный закон распределения

Нормальный закон распределения задается плотностью

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Параметры a и σ являются, соответственно, математическим ожиданием и средним квадратичным отклонением случайной величины. Нормальный закон распределения широко используется в математической статистике. Для вычисления вероятности попадания случайной величины, распределенной нормально, в промежуток используется функция Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

$$P(\alpha \leq X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Часто также используется формула:

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Пример 2.2. В цеху имеется 5 станков. Вероятность того, что станок работает, равна 0,8. Найти вероятность того, что будут работать не менее трех станков.

Решение. Вероятность того, что какой-либо станок работает, равна 0,8. Условие задачи соответствует биномиальному закону распределения:

$$P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n;$$

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5).$$

Указанные вероятности находим по приведенной формуле.

$$P(X \geq 3) = C_5^3 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^2 + C_5^4 \cdot 0,8^4 \cdot 0,2 + 0,8^5 =$$

$$= 0,2048 + 0,4096 + 0,32768 = 0,94208.$$

Пример 2.3. Определит вероятность того, что из пробы в 5 деталей не менее 2-х будут некачественными, если автомат, из продукции которого берутся

пробы, обрабатывает 2 детали за 1 мин и за смену в его продукции оказывается 38 дефектных деталей. Использовать для решения задачи закон распределения Пуассона.

Решение. Используем формулу распределения Пуассона: $P(X = m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!}$, $m = 0, 1, \dots$

Найдем λ — среднее количество бракованных деталей, изготавливаемых за 1 мин. Если продолжительность смены 480 мин, то $\lambda = \frac{38}{480} \approx 0,08$. Пробу из 5

деталей изготавливают за $t = \frac{5}{2} = 2,5$ мин, $\lambda t = 0,08 \cdot 2,5 = 0,2$. Найдем искомую

вероятность: $P(X \geq 2) = \sum_{m=2}^5 \frac{(\lambda t)^m}{m!} = 0,0175$. Значения вероятности найдем в таблицах при $\lambda t = 0,8$ и $m = 2$.

Пример 2.4. Партия содержит 200 изделий, среди которых 25 бракованных. Для проверки качества из партии отобрали 10 изделий. Если при этом количество бракованных изделий не превышает единицу, то партия принимается. Найти вероятность того, что партия будет принята. Определить эту же вероятность биномиальным распределением и законом распределения Пуассона.

Решение. Вычислим вероятность с помощью формулы биномиального закона распределения, $p = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$:

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= \left(\frac{7}{8}\right)^{10} + 10 \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^9 \approx 0,639. \end{aligned}$$

Вычислим эту же вероятность с помощью закона распределения Пуассона:

$$a = np = 10 \cdot \frac{1}{8} = 1,25.$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= e^{-1,25} + 1,25e^{-1,25} \approx 0,644. \end{aligned}$$

Как видим, погрешности вычислений сравнительно невелики.

Пример 2.5. Выдвинута гипотеза, что отклонение размера детали от номинала является случайной нормально распределенной величиной с $MX=0$ и $DX=25$. Соответствует ли этой гипотезе то, что в проверенных 6 деталях отклонение находилось в промежутке $[5;13)$? Уровень значимости $\alpha = 0,0005$.

Решение. Рассмотрим событие A — «отклонение в 6 деталях принадлежит промежутку $[5;13)$ ». Вычислим вероятность этого события и сравним ее с уровнем значимости α . Если вероятность будет меньше чем α , то результат испытания не будет соответствовать выдвинутой гипотезе. Вероятность события A найдем по теореме умножения вероятностей:

$$P(A) = p^6, \text{ где } p = P(5 \leq X < 13).$$

Вычислим эту вероятность:

$$P(5 \leq X < 13) = \Phi\left(\frac{13-0}{5}\right) - \Phi\left(\frac{5-0}{5}\right) = \Phi(2,6) - \Phi(1) = 0,4953 - 0,3413 = 0,154.$$

Тогда $P(A) = 0,154^6 < 0,2^6 = 0,000064$. Вероятность события A меньше уровня значимости. Следовательно, гипотеза про закон распределения не соответствует значениям случайной величины в испытаниях.

Пример 2.6. Ошибка наблюдения X при измерении длины распределена нормально с $a=5$ и $\sigma=4$. Найти вероятность того, что измеренное значение отклонится от истинного более чем на 10 мм.

Решение. По условию задачи нужно найти $P(|X| \geq 10)$. Выразим эту вероятность через вероятность противоположного события:

$$\begin{aligned} P(|X| \geq 10) &= 1 - P(|X| < 10) = 1 - P(-10 < X < 10) = \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{10-5}{4}\right) + \Phi\left(\frac{-10-5}{4}\right) = \\ &= 1 - \Phi(1,25) - \Phi(3,75) = 1 - 0,3944 - 0,4999 = 0,1057. \end{aligned}$$

Замечание. Важной задачей теории вероятностей является определение законов распределения и числовых характеристик функций случайных аргументов, законы распределения которых, известны. Пусть X — дискретная случайная величина, заданная табличным законом распределения.

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Известно, что $Y = \varphi(X)$, тогда закон распределения Y имеет такой вид:

y_i	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	$\dots$	$\varphi(x_n)$
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Числовые характеристики функции можно найти по ее закону распределения или по формулам:

$$MY = \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) p_i; \quad DY = \sum_{i=1}^n (\varphi(x_i))^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^n \varphi(x_i) p_i \right)^2.$$

Произвольные моменты распределения определяются аналогичными формулами:

$$\nu_k(Y) = \sum_{i=1}^n (\varphi(x_i))^k p_i; \quad \mu_k(Y) = \sum_{i=1}^n (\varphi(x_i) - MY)^k p_i.$$

Если случайные величины X и Y заданы законами распределения:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

y_j	y_1	y_2	$\dots$	y_m
q_j	q_1	q_2	$\dots$	q_m

и задана функция $Z = \psi(X, Y)$, то закон ее распределения определяется так. Множество значений, принимаемых Z , представляется в виде: $\{z_{ij} = \psi(x_i, y_j)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, m$. При этом

$$P(Z = z_{ij} = \psi(x_i, y_j)) = P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = p_i q_j.$$

Пусть X — непрерывная случайная величина, заданная плотностью распределения $f_1(x)$. Если $Y = \varphi(X)$ и φ — дифференцируемая функция, монотонная в области значений X , то плотность распределения этой функции имеет вид $f(y) = f_1(\psi(y))|\psi'(y)|$, где ψ — функция, обратная к φ . Если φ — не монотонная функция в области изменения аргумента, то обратная функция неоднозначна и плотность распределения $f(y)$ определяется как сумма стольких слагаемых, сколько значений имеет обратная функция: $f(y) = \sum_{i=1}^n f_1(\psi_i(y))|\psi'_i(y)|$, где $\psi_i(y)$ — функции, обратные к φ .

При определении числовых характеристик функций непрерывных аргументов, операция сложения, выполняемая для дискретных величин, заменяется операцией интегрирования:

$$MY = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx; \quad DY = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x) f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x) dx \right)^2.$$

Пример 2.7. Работник обслуживает 4 станка, которые расположены в одну линию на расстоянии a один от другого. Найти закон распределения для случайной величины Z — расстояние, которое проходит работник между двумя обслуживаниями, считая, что события — «работник находится возле любого из станков» и «станок нуждается в обслуживании» — равновозможные.

Решение. Рассмотрим случайные величины: X — номер станка, возле которого находится работник; Y — номер станка, нуждающегося в обслуживании. Если станки перенумеровать в той последовательности, в которой они расположены (1, 2, 3, 4), то законы распределения X и Y имеют следующий вид:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,25	0,25	0,25	0,25

y_i	1	2	3	4
p_i	0,25	0,25	0,25	0,25

При этом $Z = a|X - Y|$. Составляя закон распределения Z , найдем значения функции для всех возможных комбинаций значений X и Y . Таких комбинаций буде 16. Вероятности для всех этих комбинаций одинаковые и равны $\frac{1}{16}$ (по теореме умножения вероятностей).

z_i	0	a	$2a$	$3a$	a	0	a	$2a$	$2a$	a	0	a	$3a$	$2a$	a	0
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

В таблице значения z_i повторяются. Составим новую таблицу, в которой такие значения запишем один раз, а их вероятности сложим.

z_i	0	a	$2a$	$3a$
p_i	0,25	0,375	0,25	0,125

Пример 2.8. Количество элементов ЭВМ, которые выходят из строя за некоторый промежуток времени, распределено по закону Пуассона с параметром a . Время ремонта машины зависит от количества X элементов, вышедших из строя, и определяется по формуле $Y = T(1 - e^{-\lambda X})$. Найти математическое ожидание времени ремонта и убытков, связанных с простоем машины, если убытки пропорциональны квадрату времени, потраченного на ремонт:

$$S = kY^2 = kT^2(1 - e^{-\gamma X})^2.$$

Решение. Случайная величина X имеет следующий закон распределения:

$$P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Используя формулу для нахождения математических ожиданий функций случайных аргументов, получим:

$$\begin{aligned} MY &= \sum_{m=0}^{\infty} T(1 - e^{-\gamma m}) \frac{a^m}{m!} e^{-a} = Te^{-a} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(e^{-\gamma} a)^m}{m!} \right) = \\ &= Te^{-a} (e^a - e^{ae^{-\gamma}}) = T(1 - e^{-a(1-e^{-\gamma})}) \\ MS &= \sum_{m=0}^{\infty} kT^2(1 - e^{-\gamma m})^2 \frac{a^m}{m!} e^{-a} = \\ &= kT^2 e^{-a} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} - 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ae^{-\gamma})^m}{m!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ae^{-2\gamma})^m}{m!} \right) = \\ &= kT^2 (1 - 2e^{-a(1-e^{-\gamma})} + e^{-a(1-e^{-2\gamma})}) \end{aligned}$$

Примеры для самостоятельного решения

2.2.1. Брак при изготовлении деталей составляет в среднем 5%. Найти вероятность того, что среди 5 наудачу взятых деталей: а) не окажется ни одной бракованной; б) будет две бракованных детали.

2.2.2. Работник обслуживает 6 однотипных станков. Вероятность того, что станок нужно обслуживать в течение времени T , равна $\frac{1}{3}$. Найти вероятность того, что за время T :

- а) нужно буде обслуживать 3 станка;
- б) количество требований на обслуживание за время T будет от 2 до 5.

2.2.3. В электросеть включено 4 прибора, мощность каждого из них 660 Вт. Найти вероятность того, что сеть будет обесточена, если напряжение в ней 220 В, предохранитель рассчитан на 10 А и вероятность для каждого прибора быть включенным равна 0,5.

2.2.4. Вероятность отказа при испытании каждого прибора равна 0,2. Сколь-

ко приборов нужно испытать, чтобы с вероятностью не менее чем 0,9 получить не менее 3-х отказов?

2.2.5. За один цикл автомат изготавливает 10 деталей. За сколько циклов вероятность изготовления хотя бы одной бракованной детали будет не меньше чем 0,8, если вероятность того, что произвольная деталь бракованная, равна 0,01?

2.2.6. Вероятность изготовления бракованного сверла равна 0,02. Сверла пакуются в коробки по 100 штук. Найти вероятность того, что в коробке:

- а) не будет бракованных свёрл;
- б) бракованных свёрл будет не больше трех.

2.2.7. В некоторой местности на каждые 100 арбузов выпадает в среднем один, масса которого не меньше 10 кг. Найти вероятность того, что в партии из 400 арбузов будет:

- а) 3 арбуза массой не менее 10 кг;
- б) не менее 2-х таких арбузов.

2.2.8. При определенном виде сварки в металле независимо одна от другой образуются трещины, в среднем по две на сварное соединение. Какова вероятность того, что сварном соединении будет не более двух трещин?

2.2.9. Партия изделий принимается, если дефектные детали составляют не более 2%. Сколько деталей нужно проверить для того, чтобы партия, в которой 3% дефектных деталей, не была принята с вероятностью $P > 0,95$, а партия, в которой 1% дефектных деталей, была принята с вероятностью не менее 0,95?

2.2.10. Станок-автомат при нормальной отладке выпускает бракованную деталь с вероятностью 0,02. Переналадка выполняется после выпуска первой бракованной детали. Найти математическое ожидание количества деталей, изготовленных между двумя переналадками.

Раздел III. Элементы математической статистики

3.1. Первичная обработка и графическое представление выборочных данных

Определение 1. Генеральной совокупностью в математической статистике называется множество однотипных объектов, количественный или качествен-

ный признак которых надо изучить.

Определение 2. Подмножество объектов, отобранных соответствующим образом из генеральной совокупности, называется **выборочной совокупностью**.

Определение 3. Полагаем, что признак, который изучается, является случайной величиной X с функцией распределения $F(x)$. Результаты выборки будем рассматривать как последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$. Закон распределения для всех X_i определяется функцией $F(x)$. Результаты выборки — реализации случайных величин — будем обозначать, соответственно, через $x_1, x_2, \dots, x_n$. Разместив эти числа в порядке возрастания и записав частоты n_i с которыми встречаются эти значения, получим **вариационный**, или **статистический**, ряд:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
Частоты	n_1	n_2	...	n_k

На основании такого ряда можно построить статистическую функцию распределения $\Phi(x) = \sum_{x \leq X} \frac{n(x_k)}{n}$. Если $n \rightarrow \infty$, то статистическая функция распределения стремится к теоретической функции распределения.

Определение 4. Статистический ряд графически представляется **полигоном распределения**. Чтобы построить его, на оси абсцисс отмечают значения реализаций, а на оси ординат — соответствующие им частоты (относительные частоты). Отмеченные точки соединяют отрезками прямых.

Замечание. В случае, когда X — непрерывная величина и объем выборки большой, результаты выборки задают интервальным рядом. Для этого область реализаций разбивают на k интервалов и для каждого интервала определяют частоты. Количество интервалов $k < 5 \lg n$, а их длину Δx_i часто берут одинаковой. Полученный ряд геометрически представляется гистограммой. Для ее построения на оси абсцисс откладывают интервалы, а на них как на основах строят прямоугольники, высота которых пропорциональна частоте (относительной частоте) интервала. Гистограмма дает определенное представление про график

плотности распределения.

Пример 3.1. Из генеральной совокупности произведена выборка объемом $n = 32$. Получены такие реализации случайной величины: 2,2; 7,1; 6,3; 3,9; 5,9; 5,6; 5,6; 4,7; 7,9; 3,2; 6,1; 5,5; 6,4; 6,0; 6,9; 4,7; 6,4; 6,9; 6,7; 7,9; 4,2; 6,7; 6,0; 9,2; 5,5; 6,5; 3,5; 4,9; 7,2; 4,9; 8,9; 5,7. Составить интервальный ряд и построить гистограмму.

Решение. Для построения интервального ряда разбиваем область реализаций на 7 интервалов с одинаковыми длинами интервалов: $\Delta x = \frac{\max(x_k) - \min(x_k)}{7}$

$\Delta x = \frac{9,2 - 2,2}{7} = 1$. Частоты каждого интервала найдем, определив для каждого значения интервал. Если значения x_k попадает на границу, то увеличиваем на 1 частоту нижнего интервала.

Интервал	2,2— 3,2	3,2— 4,2	4,2— 5,2	5,2— 6,2	6,2— 7,2	7,2— 8,2	8,2— 9,2
Частота	2	3	4	9	10	2	2

В соответствии с найденным рядом строим гистограмму (рис. 5.1).

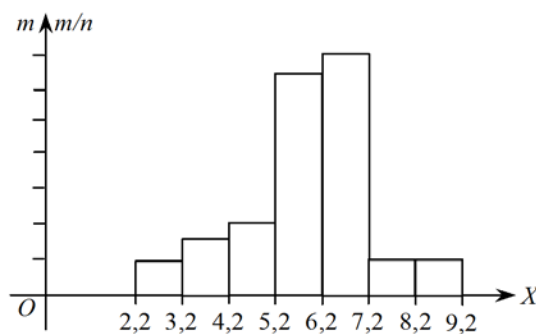


Рис. 5.1

Пример 3.2. В цехе установлено 5 станков. В течении 25 дней регистрировалось количество станков, которые простаивали. Получили следующие значения: 0, 1, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 4, 2, 0, 0, 2, 2, 3, 3, 1, 0, 1, 2, 1, 3, 5, 0. Построить статистическую функцию распределения.

Решение. На основании выборочных данных составим статистический ряд:

x_i	0	1	2	3	4	5
Частоты	5	7	7	4	1	1

Запишем статистическую функцию распределения, воспользовавшись формулой $\Phi(x) = \sum_{x \leq X} \frac{n(x_k)}{n}$:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{5} & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{12}{25} & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{19}{25} & \text{при } 2 \leq x \leq 3. \\ \frac{23}{25} & 3 \leq x \leq 4 \\ \frac{24}{25} & 4 \leq x \leq 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

3.2. Числовые характеристики выборочной совокупности (точечные оценки)

Графическое представление статистических данных дает не очень много полезной для дальнейшей работы информации. Проблема заключается в том, что мы исследуем генеральную совокупность по ее части. Поэтому возникает ряд вопросов об уровне достоверности полученных данных, о том, насколько хорошо они описывают всю генеральную совокупность, насколько точно они ее характеризуют. Следовательно, появляется необходимость в оценках полученной информации. Такими важнейшими оценками являются числовые характеристики выборочной совокупности, построенные специальным образом.

Определение 5. Пусть характеристика генеральной совокупности A , а выборочной — $\hat{A}$. Характеристика $\hat{A}$ является случайной величиной в отличие от характеристики A . Желательно, чтобы эти характеристики были близки, т.е.

$$M(\hat{A})=A$$

и можно было пользоваться одной из них вместо другой. Характеристики, удовлетворяющие этому условию, называются **несмещенными**.

Определение 6. Желательно, чтобы с ростом объема выборки выборочная характеристика все более приближалась бы к генеральной характеристике, т.е.

$$D(\hat{A}) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Характеристику, удовлетворяющую этому условию, называют **состоятельной**.

Для выборочной совокупности вычисляют числовые характеристики — выборочные случайные функции: выборочную среднюю $\bar{X}$, выборочную дисперсию S^2 , статистические моменты распределения и т.д. Реализации этих выборочных функций находят по формулам, вид которых зависит от того, в какой форме заданы выборочные данные.

Аналог математического ожидания — выборочная средняя $\bar{X}$ рассчитывается по формуле

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{\kappa} x_{\kappa}$$

и является несмещенной и состоятельной.

Аналог дисперсии — выборочная дисперсия для статистического ряда рассчитывается по формуле

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{\kappa} (x_{\kappa} - \bar{X})^2 \cdot n_{\kappa}.$$

Замечание. Если выборочные данные не сгруппированы, то

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{\kappa} x_{\kappa}, \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum_{\kappa} (x_{\kappa} - \bar{X})^2.$$

Замечание. Если данные задаются интервальным рядом, то переход к статистическому ряду выполняют, вычисляя для каждого интервала его середину.

Замечание. Удобнее всего для расчета дисперсии использовать формулу

$$\bar{s}^2 = \left(\frac{1}{n} \sum_{\kappa} x_{\kappa}^2 \right) - \bar{X}^2.$$

Замечание. Помимо выборочной дисперсии вводят и исправленную дисперсию, отличающуюся умножением на поправочный коэффициент $\frac{n}{n-1}$. Можно показать, что исправленная дисперсия более точно характеризует дисперсию генеральной совокупности.

$$\text{Расчет исправленной дисперсии: } s^2 = \frac{n}{n-1} \bar{s}^2.$$

В случае необходимости расчета других характеристик, используются начальные и центральные статистические моменты распределения более высоких порядков, которые вычисляют, соответственно, по таким формулам:

$$\nu_m = \frac{1}{n} \sum_{\kappa} X_{\kappa}^m \text{ и } \mu_m = \frac{1}{n} \sum_{\kappa} (X_{\kappa} - \bar{X})^m.$$

Пример 3.3.

Данные проведенных тестов были сведены в таблицу. Найти числовые характеристики распределения. *Решение.*

Число баллов	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Число испытуемых	1	3	7	15	21	30	12	8	3

Решение. Найдем общий объем выборки

$$n = 1+3+7+15+21+30+12+8+3=100.$$

Рассчитаем выборочную среднюю

$$\bar{X} = \frac{1}{100} (12 \cdot 1 + 13 \cdot 3 + 14 \cdot 7 + 15 \cdot 15 + 16 \cdot 21 + 17 \cdot 30 + 18 \cdot 12 + 19 \cdot 8 + 20 \cdot 3) = 16,48.$$

Найдем вторую составляющую $\frac{1}{n} \sum_{\kappa} x_{\kappa}^2$:

$$\frac{1}{100}(12^2 \cdot 1 + 13^2 \cdot 3 + 14^2 \cdot 7 + 15^2 \cdot 15 + 16^2 \cdot 21 + 17^2 \cdot 30 + \\ + 18^2 \cdot 12 + 19^2 \cdot 8 + 20^2 \cdot 3) = 272,08.$$

Тогда:

$$\text{выборочная дисперсия } \bar{s}^2 = 272,08 - (16,48)^2 = 0,4896,$$

$$\text{исправленная дисперсия } s^2 = \frac{100}{100-1} \cdot 0,4896 = 0,4945.$$

Примеры для самостоятельного решения

3.1. Имеем данные о сроке службы радиоламп (в тыс. часов): 0,45; 0,21; 0,14; 0,15; 1,52; 0,1; 0,52; 1,59; 3,38; 2,25; 0,8; 1,26; 2,31; 0,84; 3,72; 2,11; 1,02; 4,2; 2,53; 0,78; 2,92; 0,71; 4,7; 3,02; 1,58; 4,12; 2,59; 0,88; 0,96; 1,76; 1,93; 4,9; 2,82; 1,14; 5,7; 1,21; 1,47; 3,52; 0,36; 0,64. Построить интервальный ряд и гистограмму, закон распределения. Найти выборочные среднюю и дисперсию.

3.2. Из генеральной совокупности произведена выборка объемом $n = 30$. Получены такие выборочные значения: 4; 4,3; 5,68; 6,2; 5,64; 5,8; 4,25; 5,4; 5,3; 5,2; 4,55; 5,32; 6; 6,15; 4,56; 6,64; 6,5; 4,7; 6,8; 6,15; 5,6; 5,1; 4,2; 4,8; 6,9; 7; 4,9; 5; 5,25; 6,2. Построить интервальный ряд и гистограмму, закон распределения. Найти выборочные среднюю и дисперсию.

3.3. В результате сверления отверстий одним и тем же сверлом и измерения диаметров получили такие данные, в мм: 40,25; 40,29; 40,46; 40,33; 40,37; 40,27; 40,39; 40,34; 40,33; 40,35; 40,38; 40,32; 40,28; 40,41; 40,45; 40,39; 40,29; 40,3; 40,44; 40,37; 40,41; 40,33; 40,35; 40,35; 40,35; 40, 40; 40, 40; 40,3; 40,28; 40,34; 40,45; 40,44. Построить интервальный ряд и гистограмму, закон распределения. Найти выборочные среднюю и дисперсию.

3.4. В ОТК была измерена глубина паза 40 планок. Результаты измерения, мм: 2,41; 2,62; 2,73; 2,52; 2,54; 2,41; 2,81; 2,53; 2,64; 2,61; 2,72; 2,45; 2,52; 2,1; 2,64; 2,52; 2,5; 2,33; 2,24; 2,4; 2,72; 2,51; 2,4; 2,61; 2,42; 2,43; 2,65; 2,54; 2,35; 2,54; 2,62; 2,9; 2,75; 2,24; 2,65; 2,45; 2,53; 2,32; 2,24; 2,55. Построить интервальный ряд и гистограмму, закон распределения. Найти выборочные среднюю и дисперсию.

3.3. Доверительные интервалы

Числовые характеристики являются числами, т.е. точечными оценками, характеризующими наблюдения. При больших объемах выборки этих характеристик вполне достаточно, однако, при малых объемах выборки отклонения численных характеристик от истинных могут носить значительный характер. Поэтому важно знать меру их отклонения от характеристик генеральной совокупности. Чем меньше отклонение, тем достоверней выборочные характеристики, тем ближе они к характеристикам всей генеральной совокупности.

Определение 7. Пусть задана некоторая вероятность α . Требуется найти такой интервал $(\hat{A}_1, \hat{A}_2)$, который содержит характеристику A с вероятностью не меньшей α . Вероятность α называется **доверительной вероятностью**, а сам интервал $(\hat{A}_1, \hat{A}_2)$ – **доверительным**.

Доверительные вероятности, как правило, выбирают равными 0,9; 0,95 или 0,99. Тогда говорят о 10%, 5% или 1% уровне ошибки расчетов.

Как правило, при определении характеристик статистических данных, интересна выборочная средняя и мера ее отклонения от генеральной средней, т.е. доверительный интервал. При этом величина интервала зависит от объекта исследования и объема выборки.

Замечание. При малых объемах выборки (меньше 100) доверительную вероятность надо выбирать равной 0,9, а при объеме выборки более 1000 – 0,99. В этих случаях величина интервала достаточно мала и получаются хорошие результаты.

Рассмотрим наиболее часто используемый метод расчета доверительного интервала.

Задача состоит в том, чтобы найти такие t_1 и t_2 , чтобы $p(t_1 \leq t \leq t_2) = \alpha$.

При этом, считается, что мы имеем только числовые характеристики выборки.

Английский ученый В. Госсет, печатавшийся под псевдонимом Стьюдент, предложил находить интервал следующим образом:

Сначала, по таблицам Стьюдента определяется коэффициент t_α (определяет-

ся по уровню доверительной вероятности и объему выборки), а потом рассчитывается доверительный интервал

$$\bar{X} - t_a \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + t_a \frac{s}{\sqrt{n}},$$

где m – генеральная средняя, а $\bar{X}$ – выборочная средняя.

Пример 3.4.

В рамках примера 30.1. найти доверительный интервал для $p=0,9$.

Решение

В нашем случае $n=9$, исправленная дисперсия $s^2=0,4945$, т.е. $s=0,7032$, $\bar{X}=16,48$.

По доверительной вероятности 0,9 и числу степеней свободы $(n-1)=8$, из таблицы распределения Стьюдента находим $t_a = 0,8028$. Тогда доверительный интервал для генеральной средней с вероятностью 0,9 будет иметь вид

$$(16,48 - 0,8028 \frac{0,7032}{\sqrt{9}}; 16,48 + 0,8028 \frac{0,7032}{\sqrt{9}}) = (16,291; 16,668).$$

Примеры для самостоятельного решения

3.5. Из большой партии изготовленных деталей по выборке объема n найдена средняя арифметическая длины детали, равная x_{cp} . Считая, что длина детали X — нормально распределенная случайная величина, найдите доверительный интервал, который с доверительной вероятностью a покрывает неизвестное математическое ожидание a длины детали, если генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 0,5$ мм:

а) $x_{cp} = 50$ мм; $n = 64$; $a = 0,95$.

б) $x_{cp} = 51$ мм; $n = 49$; $a = 0,99$.

в) $x_{cp} = 52$ мм; $n = 36$; $a = 0,999$.

3.6. Из партии электролампочек выбрано и проверено 1000 электрических лампочек. Относительная частота появления нестандартной лампочки оказалась равной 0,15. Найдите 95% доверительный интервал для вероятности появления нестандартной лампочки при ее извлечении из данной партии.

3.4. Корреляция и регрессия

Предположим, что наблюдаются две случайных величины x и y одновременно в одном и том же процессе. Возникает вопрос: есть ли между ними какая-либо связь? Ясно, что эта связь, если она существует, должна иметь место между усредненными величинами.

Определение 8. Если существует связь между усредненными значениями случайных величин, то они называются **скоррелированными** (согласованными).

Важной характеристикой корреляции служит корреляционный момент

$$K = M(\overline{X}, \overline{Y}) = M(x - \overline{X})(y - \overline{Y}).$$

Определение 9. Если корреляционный момент равен нулю, то случайные величины x и y называются **некоррелированными**. В противном случае они **коррелированы**.

Корреляционный момент зависит от единиц измерения величин x и y , поэтому обычно вместо него рассматривают коэффициент корреляции (нормированный корреляционный момент).

Коэффициент корреляции равен отношению корреляционного момента к произведению среднеквадратичных отклонений каждой случайной величины.

$$r(x, y) = \frac{K(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

Свойства коэффициента корреляции.

1. Коэффициент корреляции всегда заключен между -1 и +1:

$$-1 \leq r \leq 1.$$

2. Чем ближе коэффициент корреляции к +1 или -1, тем ближе их зависимость между собой к линейной.

3. Считается, что если абсолютная величина коэффициента корреляции больше 0,7, то корреляционная зависимость сильная и есть линейная зависимость между случайными величинами. Если абсолютная величина коэффициента корреляции меньше 0,3 то зависимость слабая и линейной зависимости нет. В интер-

вале (0,3-0,7) зависимость считается средней и линейную зависимость можно использовать.

4. Линейная зависимость, если она существует, называется регрессионной зависимостью $y=ax+b$, а коэффициент a – коэффициентом регрессии.

$$\text{Здесь } a = \frac{r}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x},$$

$\bar{x}$ – выборочная средняя по x , $\bar{y}$ – соответствующая выборочная средняя.

Пример 3.5.

В результате обследования получено статистическое распределение 100 предприятий по производственным фондам X , млн. руб., и суточным производством Y , т. Полученные данные приведены в таблице:

$\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}$	10	15	20	25	30	35	n_{x_i}
50	2	2					4
60	2	4	5	6	4		21
70		2	7	12	10	4	35
80				10	10	6	26
90				8		6	14
n_{y_j}	4	8	12	36	24	16	100

Определить форму зависимости между X и Y , найти уравнение регрессии.

Решение. Находим условные средние $\bar{y}_x$ и $\bar{x}_y$.

$$\bar{y}_{x=50} = \frac{2 \cdot 10 + 2 \cdot 15}{4} = 12,5; \quad \bar{y}_{x=60} = \frac{2 \cdot 10 + 4 \cdot 15 + 5 \cdot 20 + 6 \cdot 25 + 4 \cdot 30}{21} \approx 21,4;$$

$$\bar{y}_{x=70} = \frac{30 + 140 + 300 + 300 + 140}{35} = 26; \quad \bar{y}_{x=80} = \frac{250 + 300 + 210}{26} \approx 29,2;$$

$$\bar{y}_{x=90} = \frac{200 + 210}{14} \approx 29,3; \quad \bar{x}_{y=10} = \frac{100 + 120}{4} = 55; \quad \bar{x}_{y=15} = \frac{100 + 240 + 140}{8} = 60;$$

$$\bar{x}_{y=20} = \frac{300 + 490}{12} \approx 65,8; \quad \bar{x}_{y=25} = \frac{360 + 840 + 800 + 720}{36} \approx 75,6;$$

$$\bar{x}_{y=30} = \frac{240 + 700 + 800}{24} = 72,5; \quad \bar{x}_{y=35} = \frac{280 + 480 + 540}{16} \approx 81,3.$$

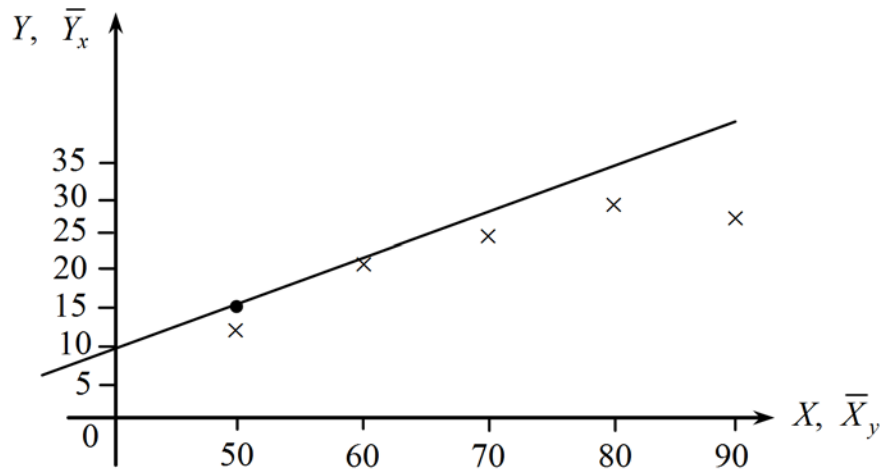
Результаты вычислений занесем в таблицу. В таблице перейдем к условным переменным, при $C_1 = 70$, $h_1 = 10$, $C_2 = 25$, $h_2 = 5$.

Замечание. Условные переменные образуются следующим образом: Находятся средние значения по X и Y и обозначаются, соответственно, C_1 и C_2 . Чтобы упростить вычисления, среднее значение принимается равным 0, а остальные значения получаются заменой – меньше (или больше) на один шаг h_1 или h_2 , соответственно, на два и т.д.

$u \backslash v$	-3	-2	-1	0	1	2	n_{x_i}	$\bar{y}_{x_i}$
-2	2	2					4	12,5
-1	2	4	5	6	4		21	21,4
0		2	7	12	10	4	35	26
1				10	10	6	26	29,2
2				8		6	14	29,3
n_{y_j}	4	8	12	36	24	16	100	
$\bar{x}_{y_j}$	55	60	65,8	75,6	72,5	81,3		

Для определения форм зависимости $\bar{y}_x = f(x)$ проанализируем, как изменяются условные средние при изменении случайных величин. При возрастании x условное среднее $\bar{y}_x$ также возрастает. В системе координат XOY множество точек $(x_i, \bar{y}_{x_i})$ обозначаем значком « $\times$ ».

График уравнения регрессии имеет вид.



Из рисунка видно, что группа построенных точек несколько отклоняется от прямой. Уравнение прямой ищем в виде:

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r \frac{s_y}{s_x} (x - \bar{x}).$$

По данным последней таблицы находим условные моменты распределения:

$$\bar{u} = \frac{-2 \cdot 4 - 1 \cdot 21 + 1 \cdot 26 + 2 \cdot 14}{100} = 0,25; \quad \bar{u}^2 = \frac{(-2)^2 \cdot 4 + (-1)^2 \cdot 21 + 1^2 \cdot 26 + 2^2 \cdot 14}{100} = 1,19.$$

Аналогично считаем по v

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{-12 - 16 - 12 + 24 + 32}{100} = 0,16; \\ \bar{v}^2 &= \frac{36 + 32 + 12 + 24 + 64}{100} = 1,68. \end{aligned}$$

Далее находим дисперсии и среднеквадратичные отклонения по каждой переменной.

$$s_u = \sqrt{1,19 - (0,25)^2} \approx 1,06; \quad s_v = \sqrt{1,68 - (0,16)^2} \approx 1,29.$$

Для нахождения коэффициента корреляции, вычислим среднее значение произведения условных переменных:

$$\overline{uv} = \frac{1}{100} \left(\begin{aligned} &(-2) \cdot (-3) \cdot 2 + (-2)(-2)2 + (-1)(-3)2 \\ &+ (-1)(-2)4 + (-1)(-1)5 + \\ &(-1) \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 10 + 1 \cdot 6 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 6 \end{aligned} \right) = 0,81.$$

$$r = \frac{0,81 - 0,25 \cdot 0,16}{1,06 \cdot 1,09} \approx 0,568.$$

Найдем значение оставшихся параметров, входящих в уравнение регрессии:

$$\bar{x} = 70 + 0,25 \cdot 10 = 72,5; \quad \bar{y} = 25 + 0,16 \cdot 5 = 25,8;$$

$$s_x = 1,06 \cdot 10 = 10,6; \quad s_y = 1,29 \cdot 5 = 6,45.$$

Запишем уравнения линий регрессии:

$$\bar{y}_x - 25,8 = \frac{6,45}{10,6} 0,563(x - 72,5); \quad \bar{y}_x = 0,343x - 0,933.$$

Раздел IV. Линейная алгебра

4. Матрицы и действия над ними

4.1. Основные понятия

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \{a_{ij}\}, \quad (i=1, \dots, m; \quad j=1, \dots, n).$$

Элементами матрицы a_{ij} могут быть числа, функции или другие объекты. Запись a_{ij} обозначает элемент матрицы A , стоящий в i -й строке и j -м столбце.

Если $m = n$, то матрица называется *квадратной* порядка n . Элементы a_{ii} квадратной матрицы называют *элементами главной диагонали*.

Пример 4.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица размера 2×3 .

$$a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_{13} = -2, a_{21} = 3, a_{22} = -1, a_{23} = 1.$$

Матрицы $A = \{a_{ij}\}$ и $B = \{b_{ij}\}$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) одного размера называются *равными*, если равны их соответствующие элементы, т. е. $a_{ij} = b_{ij}$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$).

Матрица A называется *нулевой*, если все ее элементы $a_{ij} = 0$. В этом случае записывают $A = 0$.

Квадратная матрица A называется *диагональной*, если все ее элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю.

Диагональная матрица $A = \{a_{ij}\}$ ($i, j = 1, \dots, n$) называется *единичной*, если $a_{ii} = 1$ ($i = 1, \dots, n$). Единичную матрицу обозначают:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется *треугольной*, если равны нулю все элементы под ее главной диагональю (верхнетреугольная матрица) или над главной диагональю (нижнетреугольная матрица).

4.2. Действия над матрицами

Суммой двух матриц $A = \{a_{ij}\}$ и $B = \{b_{ij}\}$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) одного размера называется матрица $C = A + B = \{c_{ij}\}$ того же размера, где $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$).

Легко видеть, что $A + B = B + A$ и $A + 0 = A$.

Произведением матрицы $A = \{a_{ij}\}$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) на число λ называется матрица $C = \lambda A = \{c_{ij}\}$ того же размера, где $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$).

Свойства:

- 1) $A + B = B + A$ (коммутативность сложения матриц);
- 2) $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$ (ассоциативность сложения матриц);
- 3) $A + 0 = 0 + A$;
- 4) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
- 5) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

Произведением матриц A размера $m \times n$ и B размера $n \times k$ называется матрица $C = AB$ размера $m \times k$, где $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, k$).

Элемент c_{ij} получается в результате умножения i -й строки матрицы A на j -й столбец матрицы B :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix},$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj},$$

причем такое произведение можно составить только тогда, когда строки матрицы A и столбцы матрицы B содержат одинаковое число элементов. Если это не так, то матрицы перемножить нельзя.

Отметим, что, вообще говоря, $AB \neq BA$ (может даже быть так, что произведение AB существует, а BA – нет).

Свойства:

- 1) $AB \neq BA$ (отсутствие коммутативности умножения матриц);
- 2) $A(BC) = (AB)C$ (ассоциативность умножения матриц);
- 3) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;
- 4) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$;
- 5) $(A + B)C = AC + BC$; $C(A + B) = CA + CB$ (дистрибутивность).

Заметим, что если E – единичная матрица порядка n и A – матрица размера $m \times n$, то $AE = A$; если A – матрица размера $n \times k$, то $EA = A$; если A – квадратная матрица порядка n , то $AE = EA = A$.

Возведение квадратной матрицы в натуральную степень определяется естественным образом: $A^2 = AA$, $A^3 = AAA = A^2A$ и т. д.

Матрица $B = \{b_{ij}\}$ называется *транспонированной* к матрице $A = \{a_{ij}\}$, если $b_{ij} = a_{ji}$. При этом используют обозначение $B = A^T$. Строки матрицы A^T являются столбцами матрицы A , и наоборот.

Свойства:

- 1) $(A^T)^T = A$;
- 2) $(AB)^T = B^T A^T$.

Пример 4.2. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

- 1) Определить размеры этих матриц.
- 2) Вычислить, если возможно, их попарные произведения.
- 3) Выполнить, если возможно, действия: $A + B$; $3A^T + C$; $AA^T + B^2$.

Решение:

1) A – матрица размера 2×3 ; B – квадратная матрица порядка 2 (т. е. размера 2×2), C – матрица размера 3×2 .

2) Произведение AB не существует, так как число элементов в строке матрицы A не равно числу элементов в столбце матрицы B . Аналогично не существует произведение BC .

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) & 2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 5 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) & 5 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -11 \end{pmatrix};$$

$$AC = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 5 + (-2) \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 4 \\ 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 5 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ -6 & 13 \end{pmatrix};$$

$$CA = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 5 \\ 5 & 0 & -10 \\ 14 & -4 & 0 \end{pmatrix}; \quad CB = \begin{pmatrix} 13 & -7 \\ 10 & 20 \\ 24 & 4 \end{pmatrix}.$$

3) Найти сумму $A + B$ невозможно, так как не совпадают размеры матриц.

$$\begin{aligned} 3A^T + C &= 3 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & -3 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 5 & -3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$AA^T + B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 24 & 4 \\ 5 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 5 \\ 6 & 32 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, все возможные решения найдены.

Примеры для самостоятельного решения

4.1. Какого размера матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \quad D = (-1,5 \quad 1 \quad 0 \quad 0,1)?$$

4.2. Приведите пример:

- а) матрицы размера 2×3 ;
- б) диагональной матрицы 3-го порядка;
- в) верхнетреугольной матрицы;
- г) единичной матрицы 2-го порядка;
- д) единичной матрицы 3-го порядка.

4.3. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Какого размера матрица A^T ? Выпишите ее.

4.4. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдите: а) $A + 3B$; б) $2B - A$.

4.5. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Найдите такую матрицу B , что $2A + 3B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -4 & 0 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$.

4.6. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ -3 & 2,1 \\ 0,2 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{2}{7} & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Существуют ли произведения:

а) AB ; б) AC ; в) BC ; г) BA ; д) CA ; е) CB ; ж) A^2 ; з) B^2 ; и) AA^T ; к) $A^T A$?

Объясните ответ, укажите размер произведения и вычислите существующие произведения матриц.

4.7. Выполните действия, если это возможно:

а) A^3 , где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $2A^2 + 3A + 5E$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A + B$; $A + B^T$; $A^T + B$; AB ; BA ,

где $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

4.2. Определители

4.2.1. Основные понятия

Определитель, или *детерминант* (determinant), квадратной матрицы

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ порядка n (или просто определитель n -го порядка) – числовая

характеристика этой матрицы, которую обозначают $\det A = |A| = \Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

и вычисляют в соответствии со следующим определением:

$$|a_{11}| = a_{11};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}, \quad (4.2.1)$$

где числа A_{ij} называются *алгебраическими дополнениями* соответствующих элементов определителя и вычисляются по формулам:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{1j} \cdot A_{1j}, \quad (4.2.2)$$

где алгебраические дополнения A_{1j} вычисляются аналогично предыдущему.

Вообще *алгебраическим дополнением* A_{ij} для элемента a_{ij} называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, где M_{ij} — *минор* элемента a_{ij} , т. е. определитель, полученный из $|A|$ вычеркиванием i -й строки и j -го столбца.

Замечание. Вычисление определителя по формулам (4.2.1) и (4.2.2) называется *разложением определителя по первой строке*. Любой определитель может быть вычислен с помощью аналогичного разложения по любой строке или столбцу. Понятно, что для разложения определителя выгодно выбирать ту строку (или столбец), в которой содержится наибольшее количество нулевых элементов (конечно, если они есть).

Пример 4.3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & 5 \end{vmatrix}$.

Решение. Поскольку определитель содержит нулевой элемент во второй строке, выберем ее для разложения определителя:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 7 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{21} + 4 \cdot A_{22} + 2 \cdot A_{23} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 4(2 \cdot 5 - (-1) \cdot 7) - 2(2 \cdot (-3) - 3 \cdot 7) = 122.$$

4.2.2. Свойства определителей

1) Определитель не меняется при его транспонировании: $|A^T| = |A|$.

Отсюда следует, что любые операции со столбцами определителя эквивалентны аналогичным операциям с его строками.

2) Если в определителе поменять местами две строки (столбца), то определитель изменит знак на противоположный.

3) Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя равны нулю, то сам определитель равен нулю.

4) Умножение какой-либо строки (столбца) определителя на произвольное число равносильно умножению определителя на это число. Следовательно, общий множитель элементов фиксированной строки (столбца) можно выносить за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5) Если определитель содержит две одинаковые или пропорциональные строки, то он равен нулю.

6) Если все элементы какой-либо строки (столбца) представлены в виде суммы, то такой определитель можно представить как сумму двух определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7) Определитель не меняется, если к любой строке (столбцу) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на фиксированное число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} & a_{23} + ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8) Если A и B – квадратные матрицы одного порядка, то $|AB| = |A||B|$.

Пример 4.4. Вычислить определитель: $\Delta = \begin{vmatrix} 11 & 21 & 31 & 41 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$.

Решение. При разложении данного определителя по любой строке нам придется вычислять четыре определителя третьего порядка, каждый из которых сводится к трем определителям второго порядка, при этом придется оперировать достаточно большими числами. Для упрощения вычислений воспользуемся свойствами 6 и 4:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

Для вычисления первого определителя используем свойство 5 (ниже запись $l_2 - 2l_1$ означает, что из элементов второй строки определителя мы вычитаем соответствующие элементы первой строки, умноженные на два, и т. п.) и раскладываем определитель по первому столбцу, в котором оказываются три нулевых элемента:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} l_2 - 2l_1 \\ l_3 - 3l_1 \\ l_4 - 4l_1 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -4 & -6 \\ -3 & -6 & -9 \end{vmatrix}.$$

Поскольку вторая строка полученного определителя равна первой, умноженной на два, то определитель равен нулю.

Далее аналогичным образом применяем свойство 5 для вычисления второго определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} l_2 - 2l_1 \\ l_3 - 3l_1 \\ l_4 - 4l_1 \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, искомый определитель $\Delta = 0$.

Матрица, определитель которой равен нулю, называется *вырожденной*, в противном случае – *невырожденной*.

Примеры для самостоятельного решения

4.2.1. Вычислите определители:

$$\text{а) } |-10|; \text{ б) } \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} -0,5 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}; \text{ г) } \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -6 \end{vmatrix}; \text{ д) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

4.2.2. Вычислите определители:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 7 & -1 & 7 \\ 3 & 7 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 4 & 8 & 5 \\ -3 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 40 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}; \text{ д) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \text{ е) } \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix};$$

$$\text{ж) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}; \text{ з) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}.$$

4.3. Обратная матрица

4.3.1. Основные понятия

Квадратная матрица A^{-1} называется *обратной* к квадратной матрице A того же порядка, если имеет место соотношение $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Теорема 3.1. Для того чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной. При этом обратная матрица определяется формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}^T, \quad \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения к элементам a_{ij} матрицы A .

Матрица $\tilde{A}^T$ называется присоединенной для матрицы A .

Пример 4.5. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -21 \neq 0,$$

следовательно, обратная матрица существует. Для ее нахождения запишем матрицу A^T и вычислим алгебраические дополнения к ее элементам:

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 11; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = -\frac{1}{21} \begin{pmatrix} 11 & -6 & 8 \\ -5 & -3 & 4 \\ -7 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -11 & 6 & -8 \\ 5 & 3 & -4 \\ 7 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Проверим, является ли найденная матрица действительно обратной для данной матрицы A :

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -11 & 6 & -8 \\ 5 & 3 & -4 \\ 7 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 21 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно, обратная матрица найдена верно.

Примеры для самостоятельного решения

4.3.1. Существуют ли обратные матрицы для матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}?$$

4.3.2. Проверьте, является ли A^{-1} обратной матрицей для матрицы A :

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.3.3. Найдите обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Проверьте результат.

4.3.2. Решение матричных уравнений

Рассмотрим матричное уравнение

$$AX = B.$$

Пусть A – квадратная невырожденная матрица. Тогда, согласно теореме 3.1, существует обратная матрица A^{-1} . Умножим обе части данного уравнения на A^{-1} слева (напомним, что произведение матриц не является коммутативной операцией!):

$A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$ – решение данного матричного уравнения.

Аналогично уравнение $XA = B$, где A – квадратная невырожденная матрица, имеет решение $X = BA^{-1}$ (умножаем обе части уравнения на A^{-1} справа).

Пример 4.6. Решить матричное уравнение $XA = B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$; $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

$$X = BA^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ -12 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -18 & 34 \\ -32 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,8 & 3,4 \\ -3,2 & -1,4 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $XA = \begin{pmatrix} -1,8 & 3,4 \\ -3,2 & -1,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 7 \\ -12 & 5 \end{pmatrix} = B$.

Примеры для самостоятельного решения

4.4.1. Решите матричные уравнения:

а) $AX = B$; б) $XA = B$,

если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.4.2. Запишите систему линейных уравнений в виде матричного уравнения:

а) $\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x + 3z = -14, \\ 3x - 2y = 5, \\ 2x - y + z = 0. \end{cases}$

4.4.3. Решите систему а) из задания 4.4.2. с помощью обратной матрицы.

4.3.3. Метод элементарных преобразований

Говорят, что к матрице A применили *элементарные преобразования строк*, если:

- одну строку матрицы умножили на число, отличное от нуля;
- две строки матрицы поменяли местами;
- к одной строке прибавили другую (поэлементно);
- к одной строке матрицы прибавили другую строку, умноженную на число.

Для того чтобы по заданной матрице A найти обратную, следует записать так называемую расширенную матрицу: $(A|E)$ и с помощью элементарных преобразований строк привести ее к виду $(E|A^{-1})$.

Для того чтобы решить матричное уравнение $AX = B$ с квадратной невырожденной матрицей A , следует записать расширенную матрицу $(A|B)$ и с помощью элементарных преобразований строк привести ее к виду $(E|X)$.

Для того чтобы решить матричное уравнение $XA = B$ с квадратной невырожденной матрицей A , следует прежде всего транспонировать это уравнение: $A^T X^T = B^T$ и с помощью элементарных преобразований строк расширенной матрицы $(A^T|B^T)$ привести ее к виду $(E|X^T)$, после чего транспонировать полученную матрицу X^T .

Пример 4.7. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} l_2 - 3l_1 \\ l_3 - l_1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{cases} l_3 - 3l_2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & | & 8 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{6}l_3 \end{cases} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{4}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} l_2 + l_3 \\ l_1 - l_3 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & | & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{5}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{4}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \rightarrow \\ & \rightarrow \begin{cases} l_1 + 2l_2 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{11}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{5}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{4}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Вынеся из матрицы множитель $\frac{1}{6}$, можно записать:

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -22 & 9 & 1 \\ -10 & 3 & 1 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.4. Системы линейных алгебраических уравнений

4.4.1. Основные понятия

Рассмотрим систему m линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (4.4.1)$$

Напомним некоторые определения.

СЛАУ называется *однородной*, если все свободные коэффициенты равны нулю: $b_i = 0$ ($i = 1, \dots, m$).

Решением СЛАУ называется упорядоченный набор чисел $x_1, \dots, x_n$ таких, что при их подстановке в уравнения системы последние обращаются в верные тождества.

СЛАУ называется *совместной*, если она имеет решение, и *несовместной* в противном случае.

Рассмотрим матричное уравнение

$$AX = B, \quad (4.4.2)$$

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Из определений умножения и равенства матриц следует, что матричное уравнение (4.4.2) эквивалентно СЛАУ (4.4.1).

Матрица A называется *матрицей системы* (4.4.1), матрица-столбец X – *столбцом неизвестных*, а матрица-столбец B – *столбцом свободных коэффициентов*. СЛАУ (4.4.1) называется *квадратной*, если матрица A квадратная (т. е. число уравнений системы равно числу неизвестных), *вырожденной* если матрица A вырожденная и *невырожденной* в противном случае. Определитель матрицы A называется *определителем системы* (4.4.1).

Таким образом, если дана квадратная невырожденная СЛАУ, то, записав ее в матричной форме, мы можем воспользоваться методами решения матричных уравнений.

Пример 4.7. Записать матричное уравнение $AX = B$ в виде системы линейных уравнений

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

и выяснить, является ли тройка чисел $(2; 1; 4)$ ее решением.

Решение. Поскольку произведение матрицы A размера 3×3 на столбец неизвестных должно быть равно столбцу свободных членов размера 3×1 , следовательно, столбец неизвестных также имеет размер 3×1 :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Составим произведение AX и приравняем его B :

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_3 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_3 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix},$$

таким образом, получаем СЛАУ

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_3 = -6, \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 5, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$$

Проверим, является ли данная тройка чисел решением данной системы. Для этого подставим эти числа вместо неизвестных в уравнения системы.

Из первого уравнения получаем: $2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = -6$ – верное равенство; из второго уравнения получаем: $2 - 1 + 5 \cdot 4 = 5$ – неверное равенство, следовательно, данная тройка чисел не является решением системы.

Пример 4.8. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение. Для матрицы системы мы уже находили ранее обратную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -11 & 6 & -8 \\ 5 & 3 & -4 \\ 7 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -11 & 6 & -8 \\ 5 & 3 & -4 \\ 7 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} -21 \\ 0 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что $(-1; 0; 1)$ действительно является решением данной системы.

4.4.2. Правило Крамера решения СЛАУ

Теорема 4.1. Рассмотрим СЛАУ из n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Если определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то существует единственное решение системы, определенное формулой

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \text{ где } \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Замечание. Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей $\Delta_i \neq 0$, то система несовместна.

Пример 4.9. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 3x - 2y + z = 2, \\ x - 5y + 2z = -3. \end{cases}$$

Решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \{l_1 + l_2\} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 4(-4 + 5) = 4 \neq 0.$$

Применим правило Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = \{l_1 + l_2\} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \{l_1 + l_2\} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8,$$

$$y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = \{l_1 + l_2\} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 12,$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 3.$$

Проверка: $1 + 2 \cdot 2 - 3 = 2$ – верно; $3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 3 = 2$ – верно;

$1 - 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = -3$ – верно.

Таким образом, система имеет единственное решение $(1; 2; 3)$.

4.4.3. Метод Гаусса решения СЛАУ

Две СЛАУ называются *эквивалентными (равносильными)*, если их решения совпадают.

Если в данной СЛАУ поменять местами уравнения, или умножить какое-либо уравнение (обе его части) на число, не равное нулю, или заменить одно из уравнений суммой его и какого-либо другого уравнения этой системы, то получится СЛАУ, эквивалентная данной. Такие преобразования являются элемен-

тарными преобразованиями системы. Им соответствуют элементарные преобразования строк расширенной матрицы системы $(A|B)$.

Методом Гаусса называется приведение расширенной матрицы системы с помощью элементарных преобразований строк к упрощенному виду, в котором в левой части расширенной матрицы находится треугольная матрица. После этого неизвестные легко находятся последовательным вычислением.

Этот метод применим для любых СЛАУ, в том числе вырожденных и прямоугольных.

Пример 4.10.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_3 = 3. \end{cases}$$

Решение

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right).$$

Последняя строка полученной расширенной матрицы соответствует уравнению

$$2x_3 = 2 \Rightarrow x_3 = 1;$$

далее, из второй строки получаем

$$x_2 - 5x_3 = -6 \Rightarrow x_2 = -6 + 5x_3 = -1;$$

наконец, из первой строки:

$$x_1 + x_3 = 3 \Rightarrow x_1 = 3 - x_3 = 2.$$

Таким образом, система имеет единственное решение $(1; -1; 2)$.

Пример 4.11.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 3, \\ 3x + 5y + 7z = 6, \\ 5x + 8y + 12z = 9. \end{cases}$$

Решение. Поскольку ни один коэффициент в первом столбце не является единицей, что было бы удобно для обнуления остальных коэффициентов, мы можем предварительно получить нужную единицу, например, вычтя из первой строки расширенной матрицы вторую строку:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 12 & 9 \end{array} \right) &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & 5 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 12 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Последняя строка полученной расширенной матрицы соответствует тривиальному уравнению:

$$0x + 0y + 0z = 0.$$

Это уравнение является тождеством при любых значениях переменных. Следовательно, мы не можем, как в предыдущем примере, определить из этого уравнения значение переменной z в решении системы. Она может принимать любые действительные значения: $z \in R$. Заметим, что в таком случае эту переменную принято называть *свободной*.

Далее, из второй строки:

$$-y + z = -3 \Rightarrow y = 3 + z,$$

и из первой строки:

$$-x - 2y - 2z = -3 \Rightarrow x = 3 - 2y - 2z = 3 - 2(3 + z) - 2z = -3 - 4z.$$

Таким образом, система имеет бесконечно много решений вида

$$(-3 - 4z; 3 + z; z \mid z \in R).$$

Пример 4.12.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 1, \\ 2x - y + z = 3, \\ 3x + y - 2z = 5. \end{cases}$$

Решение

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Последняя строка соответствует уравнению $0x + 0y + 0z = 1$, которое не является тождеством ни при каких значениях переменных. Следовательно, данная система не имеет решений, т. е. противоречива.

Примеры для самостоятельного решения

4.5.1. Используя правило Крамера, решите:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x + y = 4, \\ 3x - 2y = 5; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 5x + y - 3z = 4, \\ 3x - 2y - 5z = 5, \\ 2x - y + z = 3. \end{cases}$$

4.5.2. Приведите пример системы линейных уравнений, которая имела бы ровно два решения.

4.5.3. Решите системы линейных уравнений, используя метод Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x + y - 3z = 4, \\ 3x - 2y - 5z = 5, \\ 2x - y + z = 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -3x + 3y + 5z = -18, \\ 5x + 2y + 6z = -13, \\ x + 5y + 5z = -14; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 3z - x - y = 1, \\ 3x + 2y - 3z = -4, \\ x + 3z = -1; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 3x - 2y + 5z = 8, \\ 3z - 2x - y = 3, \\ 7x - z = 2; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} 2x - 7y + z = 10, \\ 3x + 13y - 3z = 0, \\ 7x - y - z = -11; \end{cases} \quad \text{е) } \begin{cases} 5x + 2y - z = 17, \\ y + 7z = -4, \\ 4x - 5y + 3z = -10; \end{cases}$$

$$\text{ж) } \begin{cases} x + 3y + 2z - 7t = 8, \\ 2x + 5y - 3z - 18t = -11, \\ x + 3y - 2z - 11t = -8; \end{cases} \quad \text{з) } \begin{cases} 5x + 4y - z + 10t = 13, \\ x + y + 2t = 2, \\ x + 3y + 2z + 2t = -4; \end{cases}$$

$$\text{и) } \begin{cases} -3y + 7z + 27t = -20, \\ 2x - y + 5z + 17t = -12, \\ -3x - 3y - z + 3t = -4, \\ 6x + 4y + 7z + 13t = -6. \end{cases}$$

4.5.4. Найдите ранг матрицы $A = (a_1 \ a_2 \ a_3)$, где $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Раздел V. Приложения теории матриц и систем линейных уравнений

5. Оптимизационные экономико-математические модели

5.1. Основные понятия

Эффективность управления зависит от комплексного учета многих факторов и, не в последнюю очередь — от процедуры принимаемых решений.

Оптимизационные задачи возникают при исследовании возможных вариантов функционирования конкретного объекта, когда возникает ситуация выбора варианта, наилучшего по некоторому правилу, критерию, характеризующему соответствующей целевой функцией (например, минимум затрат, максимум продукции). В общем случае, это совокупность математических и численных методов, с помощью которых можно найти наилучший вариант из множества альтернатив, не перебирая их полностью.

Все методы можно объединить в три группы:

неформальные (эвристические) — совокупность логических приемов и методов выбора оптимальных решений руководителем путем теоретического (мыслительного) сравнения альтернатив с учетом накопительного опыта;

коллективные — метод «мозговой атаки» («мозговой штурм») — предлагаются различные альтернативы, даже такие, которые выходят за рамки обычных приемов и способов реализации подобных ситуаций в обычных условиях;

количественные — научно-практический подход, предполагающий выбор оптимальных решений путем математической обработки больших массивов информации.

Теория систем линейных уравнений, наряду с теорией матриц, активно применяется в количественных методах исследований помогая принять обоснованное решение.

Рассмотрим некоторые простые методы оптимизации из разных областей.

5.2. Метод парных сравнений

Первой рассмотрим типичную задачу выбора из нескольких вариантов лучшего (оптимального). Ясно, что различные варианты необходимо сравнить между собой. Возникает вопрос: как сравнивать? Сложность задачи состоит в двухступенчатом подходе к ее решению. На первом этапе выбирается набор характеристик для сравнения. Их можно выбрать как неформальными, так и коллективными методами. На втором этапе выбирается методология сравнения. В самом деле, различные варианты можно сравнивать по принципу лучше или хуже, а можно сравнивать по принципу — насколько лучше или хуже. В первом случае задача решается методом парных сравнений, во втором — преимущественно методом анализа иерархий (МАИ).

Как следует из названия, метод парных сравнений основан на попарном сравнении различных вариантов с целью выбора одного лучшего из них. Процедура сравнения выглядит образом, описанным ниже.

Пусть несколько объектов сравниваются по k характеристикам. Для этого составляем матрицу, строки и столбцы которой суть сравниваемые объекты, а пересечение столбцов и строк — характеристика их сравнения. Принято считать, что объект - строка сравнивается с каждым объектом — столбцом.

Сначала сравниваем попарно все объекты по каждой характеристике, применяя следующее правило:

$$SR_{ij}^l = \begin{cases} 0, & \text{если } Y_{li} < Y_{lj} \\ 1/2, & \text{если } Y_{li} = Y_{lj}, i, j=1, \dots, k. \\ 1, & \text{если } Y_{li} \geq Y_{lj} \end{cases}$$

Если сравниваемый объект имеет лучшую характеристику, то его преимущество обозначается 1, если эти характеристики равны, то пишем $1/2$, и, наконец, если эта характеристика хуже, то ставим 0. Мы получаем k матриц одинаковой размерности.

Затем все эти матрицы складываются. Сумма всех матриц называется *результатирующей* матрицей.

Далее, в результирующей матрице находятся суммы элементов каждой строки. Наилучшим считается вариант, набравший наибольшую сумму. Однако в зависимости от постановки задачи может быть выбран вариант, получивший наименьшее число баллов.

Замечание: Чем больше характеристик сравниваемых объектов выбирается, тем точнее полученный результат.

Пример 5.1.

Выбор компании для устройства на работу.

Рассматриваются четыре компании. Компании оцениваются по 10-бальной шкале по следующим характеристикам.

Компания	Уолл стрит	Селебрити	Окей	Стрелка
Заработная плата	9	8	4	6
Премии	7	5	1	3
Комфортность условий	10	9	6	4
Отношение к персоналу	8	9	7	3

Какую компанию выбрать?

Решение

Составим матрицы характеристик:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1/2111 \\ 01/211 \\ 001/20 \\ 0011/2 \end{pmatrix},$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 1/2111 \\ 01/211 \\ 001/21 \\ 0001/2 \end{pmatrix},$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1/2111 \\ 01/211 \\ 001/20 \\ 0011/2 \end{pmatrix},$$

$$S_4 = \begin{pmatrix} 1/2011 \\ 11/211 \\ 001/21 \\ 0001/2 \end{pmatrix}.$$

Найдем сумму матриц:

$$S = \begin{pmatrix} 2344 \\ 1244 \\ 0022 \\ 0022 \end{pmatrix}.$$

Далее суммируем каждую строку суммы матриц S :

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Наибольшее число набрала первая строчка, т.е. для трудоустройства лучше всего выбирать компанию «Уолл стрит».

Пример 5.2.

При исследовании загрязнения воздушного бассейна города и потенциала его самоочищения была поставлена задача о распределении части бюджета между вложением в очистные сооружения и посадкой зеленых насаждений, так чтобы ущерб составляющих экосистему города (растительности, почвы, воды) и здоровья человека был минимальным. Варианты сравнивались через пять лет.

Результаты представлены в таблице:

	90/10	80/20	70/30	60/40	50/50	40/60	30/70	20/80	10/90
Атмосфера	-0,41	-0,382	-0,35	-0,32	-0,29	-0,26	-0,23	-0,20	-0,17
Растит.	0,60	0,52	0,44	0,36	0,26	0,21	0,13	0,04	0,03
Почва	-0,25	-0,23	-0,21	-0,19	-0,17	-0,16	-0,14	-0,12	-0,10
Вода	-0,17	-0,16	-0,15	-0,13	-0,12	-0,11	-0,1	-0,08	-0,07
Здоровье	-0,1	-0,09	-0,08	-0,08	-0,07	-0,06	-0,05	-0,05	-0,04

Матрицы парных сравнений для каждой характеристики имеют вид:

[illegible]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

растительность,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[illegible]

Сумма баллов каждой из строк равна

$$\begin{pmatrix} 37 \\ 34 \\ 31 \\ 28 \\ 25 \\ 22 \\ 19 \\ 16 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Из результирующей матрицы следует, что минимальный ущерб здоровью человека и другим составляющим экосистемы города (растительность, почва и вода) будет нанесен при распределении «экологической» части бюджета в следующем соотношении: 90% — в очистные сооружения и 10% — в развитие растительности (первая строка).

Замечание.

Дальнейшим развитием метода парных сравнений является метод анализа иерархий. Суть этого метода заключается в процедуре подбора весов характеристик, т.е. в определении степени важности характеристики, используемой при выборе. Следующим развитием этого метода является определение степени важности используемых характеристик с помощью системного подхода, что позволяет учесть и понятие «на сколько».

Отметим, что веса влияния выбранных характеристик часто определяют с помощью экспертов (коллективные методы оптимизации).

Примеры для самостоятельного решения

5.1. Составьте самостоятельно задачу сравнения, выбрав не менее 5 характеристик.

5.3. Оптимальное программирование (постановка задачи)

Другой тип задач — оптимизация некоторой заданной целевой функции (как правило — минимум издержек или максимум прибыли).

В общем виде математическая постановка задачи оптимального программирования состоит в определении наибольшего или наименьшего значения целе-

вой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при условиях $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i$; ($i = 1, 2, \dots, m$), где f и g_i — заданные функции, а b_i — некоторые действительные числа.

Задачи оптимального программирования делятся на задачи линейного и нелинейного программирования. Если все функции f и g_i — линейные, то соответствующая задача является задачей линейного программирования. Если хотя бы одна из указанных функций — нелинейная, то соответствующая задача является задачей нелинейного программирования.

Среди задач линейного программирования наиболее глубоко изучены задачи выпуклого программирования. Это задачи, в результате решения которых определяется минимум (или максимум) функции, заданной на выпуклом замкнутом множестве. Поэтому важнейшим понятием оптимального программирования является понятие выпуклого множества.

Замечание. Множество называется *выпуклым*, если прямая, соединяющая две любые его точки, лежит в этом множестве.

Доказано, что если ограничения задачи образуют выпуклое множество и оптимальное решение существует, то оно находится на границе этого выпуклого множества, и, скорее всего, в угловых точках, образованных пересечением линейных ограничений. Поэтому решение задачи оптимального программирования сводится к определению значений целевой функции в угловых точках, т.е. к решению системы линейных уравнений и проверке условий оптимальности.

В общем виде задача линейного программирования ставится следующим образом: найти набор значений $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, максимизирующий линейную форму

$$f(\bar{X}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

и удовлетворяющий условиям:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Линейная функция $f(X)$ называется целевой функцией задачи.

Набор значений $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, компоненты которого удовлетворяют огра-

нениям задачи, называется *планом*, или *допустимым решением*.

А *оптимальное* решение максимизирует значение целевой функции.

Замечание. Математическая модель задачи может быть канонической и неканонической.

Если все ограничения системы заданы уравнениями и переменные x_j неотрицательные, то такая модель задачи называется канонической.

Если хотя бы одно ограничение является неравенством, то модель задачи является *неканонической*. Чтобы перейти от неканонической модели к канонической, необходимо в каждое неравенство ввести балансовую переменную x_{n+i} .

Если знак неравенства « $\leq$ », то балансовая переменная вводится со знаком плюс, если знак неравенства « $\geq$ », то — минус. В целевую функцию балансовые переменные не вводятся.

Чтобы составить математическую модель задачи, необходимо:

- ввести обозначения переменных;
- исходя из цели экономических исследований, составить целевую функцию;
- записать систему ограничений.

Рассмотрим несколько примеров постановки математической модели задачи.

Пример 5.3. Задача оптимального использования ресурсов

В распоряжении магазина имеется определенное количество ресурсов: рабочая сила, оборудование, производственные площади. Например, пусть это будут ресурсы трех видов: рабочая сила (80 чел./дней), производственные площади (480 м²) и оборудование (130 м полок). Магазин может разместить товары четырех видов. Информация о количестве единиц каждого ресурса, необходимых для размещения товара каждого вида, и доходах, получаемых магазином от единицы каждого вида товаров, приведена в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Ресурсы	Нормы расхода ресурсов на единицу товара				Наличие ресурсов
	Товар 1	Товар 2	Товар 3	Товар 4	
Рабочая сила	7	2	2	6	80
Производственные площади	5	8	4	3	480
Оборудование	2	4	1	8	130
Цена ед. товара (тыс. рублей)	3	4	3	1	

Требуется построить модель размещения товара, при котором общая продажа продукции будет максимальной.

Решение. Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 число товаров каждого типа. *Целевая функция* — это выражение, которое необходимо максимизировать:

$$f(X) = 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4.$$

Ограничения по ресурсам:

$$7x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 80 \text{ (рабочая сила),}$$

$$5x_1 + 8x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 480 \text{ (производственные площади),}$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 8x_4 \leq 130 \text{ (оборудование),}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Пример 5.4. Задача о размещении производственных заказов

Предприятию необходимо обеспечить производство 300 тыс. буклетов, которые могут выпускать четыре организации. Для этого выделены вложения в размере 1,8 млн. руб. Цена заказа в каждой организации характеризуется величинами удельных вложений и себестоимостью единицы продукции в соответствии с табл. 1.2.

Таблица 1.2

Показатели	Организации			
	1	2	3	4
Себестоимость изделия, руб.	83	89	95	98
Удельные вложения, руб.	120	80	90	40

Необходимо построить модель распределения буклетов и вложений по организациям, при котором суммарная стоимость изделий будет минимальной.

Решение. Введем следующие обозначения:

i — номер организации ($i = 1, \dots, n$; $n = 4$);

x_i — объем выпускаемой продукции в организации i ;

T — суммарная потребность в изделиях ($T = 300$ тыс. шт.);

K — выделяемые вложения ($K = 1,8$ млн. руб.);

c_i — себестоимость продукции в организации i ;

k_i — удельные вложения на единицу продукции в организации i .

Экономико-математическая модель задачи будет иметь вид:

$$f(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \min; \quad \sum_{i=1}^n x_i \geq T; \quad \sum_{i=1}^n k_i x_i \leq K; \\ x_i \geq 0; i = 1, \dots, n.$$

Подставляя исходные данные, имеем:

$$f(X) = 83x_1 + 89x_2 + 95x_3 + 98x_4 \rightarrow \min,$$

ограничения

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 300 \text{ (тыс. шт.)},$$

$$120x_1 + 80x_2 + 90x_3 + 40x_4 \leq 1,8 \text{ (млн. руб.)},$$

$$x_{1,2,3,4} \geq 0.$$

Обычно задачи оптимального программирования решаются в среде *MS Excel* с помощью надстройки «Поиск решения». Однако всю процедуру нахождения оптимального решения полезно проделать в случае двух переменных графическим наглядным способом.

Замечание. Если в меню «Сервис» отсутствует команда «Поиск решения», значит, необходимо загрузить эту надстройку. Выберите команду «Сервис $\Rightarrow$ Надстройки» и активизируйте надстройку «Поиск решения». Если же этой надстройки нет в диалоговом окне «Надстройки», то вам необходимо обратиться к панели управления *MS Windows*, щелкнуть на пиктограмме «Установка и удаление программ» и с помощью программы установки *MS Excel* (или *MS Office*) установить надстройку «Поиск решения».

5.4. Графическое решение задачи линейного программирования

Рассмотрим графическое решение задачи линейного программирования на примере задачи.

Пример 5.5. Планирование выпуска рекламной продукции (задача о рекламе).

Намечается выпуск двух видов рекламы. На первый вид рекламы (постер) требуется лист 1 м^2 , 2 тюбика краски и 1 чел./день трудозатрат. На другой вид — лист $3,5\text{ м}^2$, 0,5 тюбика краски и 1 чел./день трудозатрат. Всего имеется 350 м^2 листов, 240 тюбиков краски и 150 чел./дней трудозатрат. Требуется определить, сколько рекламных постеров каждого вида необходимо сделать, чтобы обеспечить максимальную прибыль. Прибыль от установки рекламы первого вида составляет 10 денежных единиц, а от второго вида — 20 денежных единиц. При этом следует иметь в виду, что необходимо сделать не менее 60 постеров второго вида.

Решение

Сначала построим экономико-математическую модель задачи. Введем следующие обозначения: x_1 — число постеров первого вида; x_2 — число постеров второго вида. Прибыль от установки рекламы первого вида составляет $10x_1$, а от второй — $20x_2$, т.е. необходимо максимизировать целевую функцию:

$$f(x) = 10x_1 + 20x_2 \rightarrow \max.$$

Ограничения задачи имеют вид:

$$x_1 + x_2 \leq 150;$$

$$2x_1 + 0,5x_2 \leq 240;$$

$$x_1 + 3,5x_2 \leq 350;$$

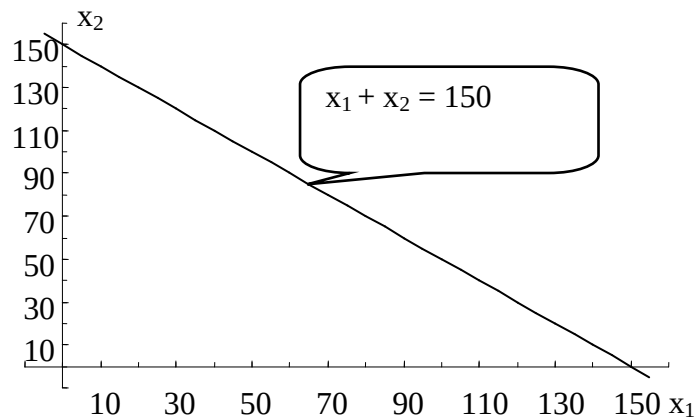
$$x_2 \geq 60;$$

$$x_1 \geq 0.$$

Первое ограничение по труду $x_1 + x_2 \leq 150$.

Построим по двум точкам прямую.

Прямая $x_1 + x_2 = 150$ проходит через точки $(150; 0)$ и $(0; 150)$.



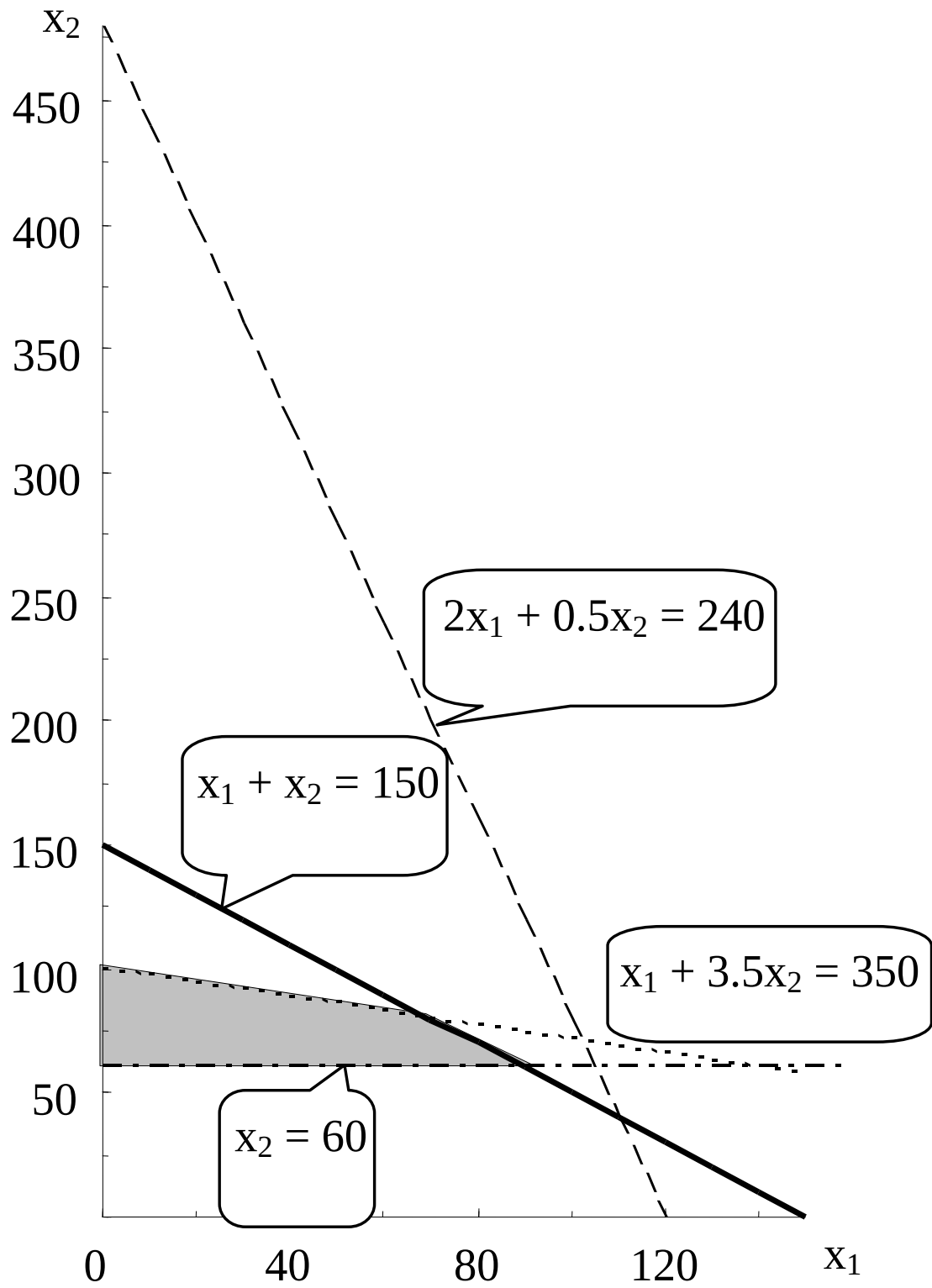
Решением первого неравенства является нижняя полуплоскость, т.к. знак неравенства «меньше или равно».

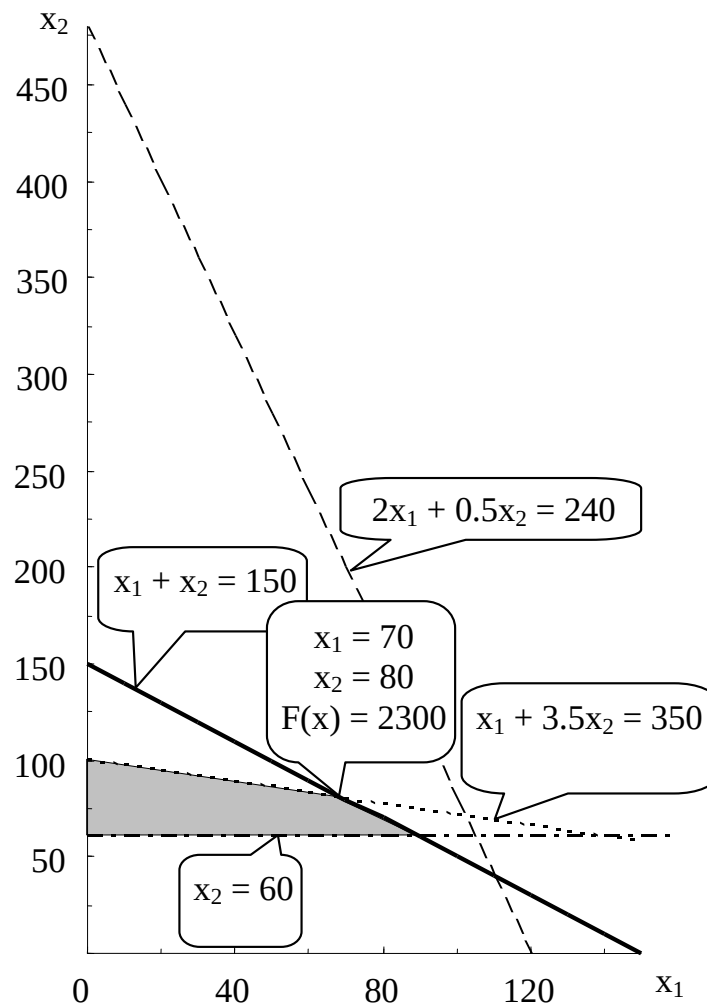
Второе ограничение по тубикам $2x_1 + 0,5x_2 \leq 240$.

Прямая $2x_1 + 0,5x_2 = 240$ проходит через точки $(120; 0)$ и $(0; 480)$.

Третье ограничение по бумаге $x_1 + 3,5x_2 \leq 350$.

Добавим четвертое ограничение по числу больших постеров $x_2 \geq 60$. Решением этого неравенства является полуплоскость, лежащая выше прямой $x_2 = 60$, т.к. знак неравенства больше или равно.





Выделенная область – это выпуклый многоугольник, образованный линиями ограничений.

Замечание: При построении многоугольника следует внимательно учитывать знаки ограничений и помнить о том, что знак больше или равно соответствует пространству над прямой, а меньше или равно — под ней. Можно подставить какую-нибудь точку плоскости (проще всего точку $(0; 0)$) в соответствующее неравенство и о выполнении или невыполнении этого неравенства сделать вывод о том, какая именно полуплоскость соответствует неравенству.

После построения выделенного многоугольника требуется найти значения целевой функции в угловых точках (точках пересечения прямых) и выбрать среди них наибольшее.

На самом деле достаточно проверить две точки пересечения прямых

$$x_1 + 3,5x_2 = 350,$$

$$x_1 + x_2 = 150.$$

И прямых

$$x_1 + x_2 = 150,$$

$$x_2 = 60.$$

Нетрудно видеть, что максимум целевой функции достигается в точке (70; 80) он равен 2300.

Ответ:

$$\max f(x) = 2300 \text{ и достигается при } x_1 = 70 \text{ и } x_2 = 80.$$

В заключение следует упомянуть об анализе модели. В надстройке «Поиск решения» важное место занимает анализ чувствительности. Анализ чувствительности показывает допуски (границы применимости) оптимального плана. По величине допусков можно понять «узкие места» плана, определить первоочередные задачи, например, последовательность закупок различных видов сырья, изменение численности работающих и т.д. Если же предельные допуски нарушены, то оптимальный план нарушен, выполнить его невозможно, и необходимо составлять новый оптимальный план.

Замечание. Заинтересованных в более детальном изучении этих вопросов направляем к прекрасным книгам И. В. Орловой по экономико-математическому моделированию в среде *MS Excel*.

Примеры для самостоятельного решения

5.4.1. $f(x) = 7x_1 + 12x_2 \rightarrow \max.$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 50;$$

$$2x_1 + 0,5x_2 \leq 40;$$

$$x_1 + 3,5x_2 \leq 75;$$

$$x_2 \geq 20;$$

$$x_1 \geq 0.$$

5.4.2

$$f(x) = 5x_1 + 8x_2 \rightarrow \max.$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 35;$$

$$2x_1 + 0,5x_2 \leq 22;$$

$$x_1 + 3,5x_2 \leq 25.$$

5.4.3.

$$f(x) = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max.$$

$$2x_1 + 7x_2 \leq 15;$$

$$2x_1 + x_2 \leq 22;$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 17.$$

Раздел VI. Элементы финансовой математики и инвестиционного анализа

В основе финансовой математики, несмотря на множество концепций, лежит одна базовая идея: деньги — это товар, которым можно торговать, и они должны приносить прибыль. Предмет финансовой математики — методы количественного анализа различных финансовых операций, т.е. расчет эффективности использования денег как товара.

Имеются две составляющих финансового процесса:

- создание условий для привлечения денег в финансовые структуры (работа с вкладчиками);
- создание условий для движения денег и получения прибыли (кредитно-инвестиционная политика).

Рассмотрим последовательно эти составляющие.

6.1. Простые процентные ставки

Совершенно ясно, что вкладчик, обладающий деньгами, просто так не принесет деньги в финансовую организацию. Ему хотелось бы получить в каком-то виде прибыль. Прибыль в финансовой среде называется *интересом*. Эта прибыль может быть социальной (вложение в благотворительные фонды) и эконо-

мической. Интерес финансовой структуры состоит в том, чтобы привлечь вкладчика максимально эффективным вложением, но не в ущерб своим интересам.

На практике, для привлечения вкладчиков, используются простые и сложные (с накоплением) процентные ставки.

Для расчета простых ставок применяются формулы арифметической прогрессии:

$$S_n = S \cdot (1 + n \cdot i).$$

где S_n — наращенная сумма к концу n -го периода; S — первоначальная сумма; i — процентная ставка (десятичная дробь, равная отношению процентной ставки к 100).

Пример 6.1. Сумма вклада равна 20 000 руб., процентная ставка составляет 17%. Какая сумма будет на счету через 5 лет, если начисление процентов производится по формуле простых процентов.

Решение

$$n = 17/100 = 0,17,$$

$$S_5 = 20\,000 \cdot (1 + 5 \cdot 0,17) = 37\,000.$$

Пример 6.2. Годовая ставка простых процентов равна 12,5%. Через сколько лет первоначальная сумма удвоится?

Решение

$$S_n = 2 \cdot S,$$

$$S \cdot (1 + n \cdot 0,125) = 2 \cdot S,$$

$$n = 1/0,125,$$

$$n = 8.$$

6.1.1. Расчет процентов для краткосрочных ссуд

В реальности далеко не всегда деньги кладутся на периоды, кратные году. Поскольку процентная ставка, как правило, устанавливается в расчете за год, то при сроке менее года необходимо определить, какая часть годового процента уплачивается вкладчику.

Рассмотрим случай с годовыми периодами начисления. Очевидно, что срок ссуды необязательно равен целому числу лет. Выразим срок n в виде дроби

$$n = \frac{t}{K},$$

где t — число дней ссуды, K — число дней в году, или временная база начисления процентов (*time basis*).

При расчете процентов применяют две временные базы:

$K = 360$ дней (12 месяцев по 30 дней) или $K = 365, 366$ дней.

Если $K = 360$, то получают **обыкновенные** или **коммерческие проценты** (*ordinary interest*), а при использовании действительной продолжительности года (365, 366 дней) рассчитывают **точные проценты** (*exact interest*).

Число дней также можно измерить приближенно и точно. В первом случае продолжительность ссуды определяется из условия, согласно которому любой месяц принимается равным 30 дням. В свою очередь точное число дней определяется путем подсчета числа дней между датой начала и датой окончания вклада. День выдачи и день окончания считаются за один день.

Рассмотрим все варианты временных баз.

1. Точные проценты с точным числом дней ссуды.

Этот вариант дает самые точные результаты. Данный способ применяется центральными банками многих стран и крупными коммерческими банками, например, в Великобритании, США.

В коммерческих документах он обозначается как **365/365** или **АСТ/АСТ** (АСТ — actual).

2. Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды.

Этот метод, иногда называемый банковским (*Banker's Rule*), распространен в межстрановых ссудных операциях коммерческих банков, во внутристрановых — во Франции, Бельгии, Швейцарии. Он обозначается, как **365/360** или **АСТ/360**.

Этот вариант дает несколько больший результат, чем применение точных процентов. Заметим, что при числе дней ссуды, превышающем 360, данный способ приводит к тому, что сумма начисленных процентов будет больше, чем предусматривается годовой ставкой. Например, если $t = 364$, то $n = 364/360 = 1,01111$. Множитель наращения за год при условии, что $i = 20\%$, составит 1,20222.

3. Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды. Этот метод применяется тогда, когда не требуется большой точности, например, при промежуточных расчетах. Он принят в практике коммерческих банков Германии, Швеции, Дании. Метод условно обозначается как **360/360**.

Очевидно, что вариант расчета с точными процентами и приближенным числом дней ссуды лишен смысла и не применяется.

Поскольку точное число дней ссуды в большинстве случаев, но не всегда, больше приближенного (среднее за год число дней в месяце равно 30,58), то метод начисления процентов с точным числом дней ссуды обычно дает больший рост, чем с приближенным.

Замечание. Как правило, в российских банках используется третий вариант, причем для удержания вкладов расчет начисления ведется помесечно.

Пример 6.3. Вклад в размере 1 млн. руб. положен 20 января 2014 до 5 октября 2014 включительно под 18% годовых. Какую сумму должен заплатить банк в конце срока при начислении простых процентов? Расчеты провести по всем трем методам.

Решение

Точное количество дней – 258.

Приближенное количество дней – 255.

1. АСТ/АСТ

$$1\,000\,000 \cdot (1 + 258/365 \cdot 0,18) = 1\,127\,233 \text{ руб.}$$

2. АСТ/360

$$1\,000\,000 \cdot (1 + 258/360 \cdot 0,18) = 1\,129\,000 \text{ руб.}$$

3. 360/360

$$1\,000\,000 \cdot (1 + 255/360 \cdot 0,18) = 1\,127\,500 \text{ руб.}$$

6.1.2. Переменные ставки

По закону РФ банк может изменять во времени процентные ставки. Если это простые ставки, то наращенная на конец срока сумма определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} S_n &= S \cdot (1 + \sum_{j=1}^k n_j \cdot i_j) = \\ &= S \cdot (1 + n_1 \cdot i_1 + n_2 \cdot i_2 + \dots + n_k \cdot i_k). \end{aligned}$$

Пример 6.4.

Сумма вклада составляет 1000 руб. Контракт предусматривает следующий порядок начисления процентов: первый год – 16%, а каждом последующем полугодии ставка повышается на 1%. Какую сумму клиент получит через 2,5 года, при условии использования простых процентов.

Решение

$$\begin{aligned} S_n &= 1000 \cdot (1 + \sum_{j=1}^4 n_j \cdot i_j) = \\ &= 1000 \cdot (1 + 1 \cdot 0,16 + 0,5 \cdot 0,17 + 0,5 \cdot 0,18 + 0,5 \cdot 0,19) = \\ &= 1000 \cdot 1,43 = 1430. \end{aligned}$$

Примеры для самостоятельного решения

6.1. Кредит в размере 250 000 руб. выдан 1 марта 2014 сроком до 12 февраля 2015 включительно под 21% годовых. Какую сумму должен заплатить заемщик в конце срока при начислении простых процентов? Расчеты провести по всем трем методам.

6.2. Кредит в размере 180 000 руб. выдан 21 апреля 2014 сроком до 15 марта 2015 включительно под 22,5% годовых. Какую сумму должен заплатить заем-

щик в конце срока при начислении простых процентов? Расчеты провести по всем трем методам.

6.3. Ссуда в размере 310 000 руб. выдана 13 марта 2014 сроком до 21 января 2015 включительно под 19% годовых. Какую сумму должен заплатить заемщик в конце срока при начислении простых процентов? Расчеты провести по всем трем методам.

6.4. Какую сумму нужно сейчас положить в банк под 20% годовых, чтобы через 4 года получить сумму равную 1 000 000 руб.?

6.5. Какую сумму нужно сейчас положить в банк под 18% годовых, чтобы через 5,5 лет получить сумму равную 2 500 000 руб.?

6.6. Ссуда в размере 320 000 руб. выдается под 28% годовых. Заемщик может вернуть сумму в размере 400 000 руб. Каков должен быть срок ссуды (360/360)?

6.2. Сложные процентные ставки (compound interest)

Сложные ставки учитывают накопление (капитализацию) процентов, т.е. присоединение начисленных процентов к сумме, которая является базой начисления процентов. Для расчета сложных ставок применяются формулы геометрической прогрессии:

$$S_n = S \cdot (1 + i)^n.$$

Величина $(1 + i)^n$ называется множителем наращения по сложным процентам (**compound interest factor**). Время, при наращении по формуле сложных процентов, обычно рассчитывается по схеме (АСТ/АСТ).

Общая сумма начисленных процентов за срок n

$$I = S_n - S = S \cdot ((1 + i)^n - 1).$$

В настоящее время, с целью привлечения крупных клиентов, банки стали предлагать вклады с накоплением, но традиционно сложные процентные ставки используются при взятии кредитов и ссуд.

Замечание. В 1626 году остров Манхеттен был куплен у индейцев за безделушки примерной стоимостью 24 доллара.

На сегодня стоимость земли этого острова оценивается примерно в 50 млрд. долларов. Такое наращение суммы соответствует годовой процентной ставке в 6,14%.

Пример 6.5. Пусть у вас есть 100 руб. Процентная ставка банка 30% годовых. Если вы положите эти деньги в банк, то через год получите 130 руб. Через два года вы получите 169 руб. и т.д. Как получается эта сумма?

$$130 = 100(1 + 0,3),$$

$$169 = 130(1 + 0,3) = 100(1 + 0,3)^2.$$

Аналогично, через три года можно получить 219,7 руб. Если вы хотите узнать, сколько принесет положенная в банк сумма S через n лет при годовой процентной ставке r , то справедлива формула сложных процентов

$$S_n = S \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n.$$

Используя эту формулу, можно решить и обратную задачу: Какую сумму необходимо положить в банк сегодня, чтобы через несколько лет получить необходимую? Очевидно,

$$S = S_n \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{-n}.$$

6.2.1. Дробное число лет начисления сложных процентов

При **дробном числе лет начисления** сложных процентов может осуществляться двумя методами:

Общим методом

$$S_n = S \cdot (1 + i)^{a+b},$$

или смешанным методом

$$S_n = S \cdot (1 + i)^a \cdot (1 + b \cdot i),$$

в котором начисление процентов по формуле сложных процентов проводится только за целое число лет, а за дробную часть срока проценты начисляются по формуле простых процентов.

При этом a — целое число лет; b — дробная часть срока; $a + b = n$.

Пример 6.6. Кредит в размере 1 000 000 руб. выдан на 2 года и 100 дней. Процентная ставка равна 17%. Рассчитать сумму к погашению по общей и смешанной схемам.

Решение

Сумма к оплате по общей схеме:

$$S_n = 1\,000\,000 \cdot (1 + 0,17)^{(2+100/365)} = 1\,429\,068.$$

По смешанной схеме:

$$S_n = 1\,000\,000 \cdot (1 + 0,17)^2 \cdot \left(1 + \frac{100}{365} \cdot 0,17\right) = 1\,432\,657.$$

Замечание: Если начисление сложных процентов происходит несколько раз в год (например, поквартально), то для расчетов используются следующие формулы:

$$S_n = S \cdot \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{n \cdot k},$$

где k — число периодов начисления в году. Например, при поквартальном начислении $k = 4$.

Примеры для самостоятельного решения

6.2.1. Ссуда в размере 2 000 000 руб. выдана на 940 дней. Процентная ставка равна 20%. Рассчитать сумму к погашению по общей и смешанной схемам.

6.2.2. Ссуда в размере 1 700 000 руб. выдана на 900 дней. Процентная ставка равна 19%. Рассчитать сумму к погашению по общей и смешанной схемам.

6.2.3. За какой срок до некоторого фиксированного момента времени нужно положить в банк 870 000 руб., чтобы получить 1 300 000 руб. Процентная ставка банка — 12,4% годовых, проценты начисляются ежеквартально.

6.2.4. Какую сумму нужно положить сейчас в банк под 13% годовых (начисление процентов ежеквартальное), чтобы через 3 года и 5 месяцев получить 4 000 000 руб.?

6.2.2. Номинальная и эффективные ставки

При использовании различных схем вложения денег всегда полезно сравнить различные варианты и выбрать наилучший. Для этого используются номинальные и эффективные процентные ставки.

Номинальная ставка (*nominal rate*) — годовая ставка, по которой начисляются проценты

$$S_n = S \cdot \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{n \cdot k},$$

где k — количество начислений в году, n — количество лет.

Пример 6.7. На депозит положена сумма в размере 1 000 000 руб. сроком на 2 года. Процентная ставка равна 16%.

Рассчитать сумму к концу года если:

- 1) начисление процентов ежегодное;
- 2) начисление процентов поквартальное.

Решение

$$1) S_n = 1\,000\,000 \cdot (1 + 0,16)^2 = 1\,345\,600.$$

$$2) S_n = 1\,000\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,16}{4}\right)^{2 \cdot 4} = 1\,368\,569,05.$$

Эффективная ставка (*effective rate*) – годовая ставка, которая соответствует реальному начисленному доходу

$$S_n = S \cdot \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{n \cdot k},$$

$$S_n = S \cdot (1 + j)^n$$

отсюда эффективная ставка вычисляется по формуле

$$j = \left(1 + \frac{i}{k}\right)^k - 1.$$

Пример 6.8. Найти эффективную ставку по данным предыдущего примера при поквартальном начислении процентов.

Решение

$$S_n = 1\,000\,000 \cdot \left(1 + \frac{0,16}{4}\right)^{2,4} = 1\,368\,569,05$$

$$j = (1 + 0,04)^4 - 1 = 0,16986 \text{ или } 16,986\%.$$

С помощью эффективной ставки можно сравнивать и вложения по простым и сложным процентам. Эта методика называется расчетом эквивалентных ставок и использует формулы:

$$i_s = \frac{\left(1 + \frac{i_c}{k}\right)^{k \cdot n} - 1}{n}.$$

$$i_c = k \cdot \left(\sqrt[k \cdot n]{1 + n \cdot i_s} - 1\right)$$

Здесь простая процентная ставка i_s , а сложная — i_c .

Можно сказать, что чем больше эффективная ставка, чем больше периодов начисления, тем выгоднее вложение.

Примеры для самостоятельного решения

6.3.1. Ссуда в размере 300 000 выдана сроком на 1,5 года под 20% годовых. Проценты начисляются ежеквартально. Найти эффективную процентную ставку.

6.3.2. Какую сумму нужно положить сейчас в банк под 13% годовых (начисление процентов ежеквартальное), чтобы через 3 года и 6 месяцев получить 4 000 000 руб.?

6.3.3. Предпринимателю через 2,5 года понадобятся деньги в размере 3 500 000 руб. Какую сумму он должен сейчас положить в банк под 14% годовых (начисление процентов каждые полгода)?

6.2.3. Учет инфляции

Влияние инфляции необходимо учитывать при измерении эффективности финансовых операций.

При расчете инфляции используют J_p — индекс цен и $J_c = 1/J_p$ — индекс, характеризующий изменение покупательной способности денег за период.

Пример 6.9. Требуется соотнести покупательную способность некоторой суммы денег (S_n), имеющейся на данный момент времени, с ее покупательной способностью t лет назад. Известно, что индекс цен за время t вырос на 20%.

Решение

Индекс покупательной способности равен

$$J_c = \frac{1}{1,2} = 0,8333.$$

Покупательная способность S_n

$$S_n \cdot J_c = S_n \cdot 0,8333.$$

Если доход не изменился, то 75 000 руб. сегодня соответствуют (по покупательной способности) 62 500 руб.

Темп инфляции h — относительный прирост цен за период

$$h = (J_p - 1) \cdot 100\% \text{ или } J_p = 1 + \frac{h}{100}.$$

Пример 6.10.

Известны темпы инфляции (в %) по годам:

2014 — 11,36;

2013 — 6,45;

2012 — 6,58;

2011 — 6,10;

2010 — 8,78;

2009 — 8,80;

2008 — 13,28;

2007 — 11,87;

2006 — 9,00;

2005 — 10,91.

Определить рост индекса цен в 2014 относительно 2005 (за 10 лет).

Решение

$$J_p = \prod_{t=1}^{10} \left(1 + \frac{h_t}{100} \right) = 1,1136 \cdot 1,0645 \cdot 1,0658 \cdot 1,061 \cdot 1,0878 \cdot 1,088 \cdot 1,1328 \cdot 1,1187 \cdot 1,09 \cdot 1,1091 = 2,4306.$$

Пример 6.11.

Пусть инфляция в месячном выражении составляет 1,5%. Чему равна годовая инфляция?

Решение

$$J_p = (1 + 0,015)^{12} = 1,1956.$$

Инфляция составляет 19,56%.

Пусть в банк положена сумма S под i % годовых на срок n лет. Инфляция составляет h % в годовом выражении. Какова будет покупательная способность денег, которые будут на счету к моменту окончания срока вклада?

При наращении по формуле простых процентов

$$S_{n\text{inf}} = \frac{S \cdot (1 + n \cdot i)}{\left(1 + \frac{h}{100} \right)^n}.$$

При наращении по формуле сложных процентов

$$S_{n\text{inf}} = \frac{S \cdot \left(1 + \frac{i}{100}\right)^n}{\left(1 + \frac{h}{100}\right)^n}.$$

Ставка, скорректированная на величину инфляции, называется **брутто-ставкой**:

$$1 + r = (1 + i) \cdot \left(1 + \frac{h}{100}\right)$$

$$r = i + \frac{h}{100} + i \cdot \frac{h}{100}.$$

На практике для расчетов используется упрощенная формула:

$$r = i + \frac{h}{100}.$$

Пример 6.12.

Рассчитать реальную годовую ставку при следующих условиях:

- годовой темп инфляции – 15,5%,
- брутто ставка – 20% годовых,
- время расчета – 6 месяцев (простые проценты).

Решение

$$J_p = \left(1 + \frac{h}{100}\right)^n, \quad J_p = \left(1 + \frac{15,5}{100}\right)^{0,5} = 1,0747,$$

$$i = \frac{1}{0,5} \left(\frac{1 + 0,5 \cdot 0,2}{1,0747} - 1 \right) = 0,0471.$$

При этих условиях процентная ставка составляет 4,71%.

Пример 6.13. Рассчитать реальную годовую ставку при следующих условиях: индекс цен за весь период – 1,331, брутто-ставка – 12% годовых, время расчета – 3 года (сложные проценты).

Решение

$$\left(1 + \frac{h}{100}\right) = \sqrt[n]{J_p}, \quad \left(1 + \frac{h}{100}\right) = \sqrt[3]{1,331} = 1,1.$$

$$i = \left(\frac{1 + 0,12}{1 + \frac{10}{100}} - 1 \right) = 0,01818.$$

Процентная ставка 1,818%.

Пример 6.14. Что выгоднее получить 1 000 000 руб. через 3 года или сейчас 740 000 при условии, что инфляция составляет 11% в год?

Решение

$$S = \frac{1000\,000}{(1 + 0,11)^3} = 731\,191,38.$$

Поскольку полученная через три года сумма 1 000 000 руб. сегодня составляет 731 191,38, то выгоднее взять 740 000.

6.3.1. Статистические методы оценки эффективности инвестиций

Второй важной задачей финансовой математики является расчет получения прибыли от кредитно-инвестиционной политики.

Будем понимать под **инвестицией** любое вложение денег. Такое вложение будет эффективным, если прибыль от реализации инвестиционного проекта покрывает расходы на привлечение денег, содержание аппарата для проведения операций и обеспечит маржу (дополнительную прибыль).

Исходя из затрат и доходов от инвестиций можно найти разность между этими величинами, т.е. чистую прибыль. При сравнении инвестиционных проектов, как правило, выбирается тот, при котором прибыль будет наибольшей, либо такой, который решает задачу с меньшими расходами. При сравнении различных проектов самыми простыми и часто употребляемыми являются статистические методы, не учитывающие изменение денежных масс во времени. Их

применяют при коротком инвестиционном проекте длительностью до года, когда информация об инвестиционном объекте достоверна и можно четко сформулировать основную цель инвестиционного проекта.

Рассмотрим некоторые методы оценки инвестиционных проектов.

Метод текущих затрат. В этом методе в текущие затраты включают проценты на используемый капитал, т.е. используют формулу:

$$З = З_n + З_к ,$$

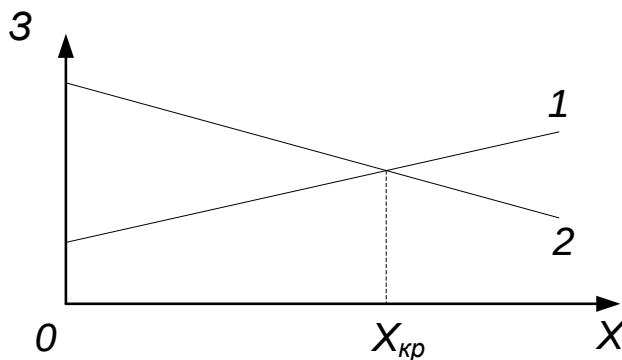
где $З_n$ — все производственные затраты, а $З_к$ — капитальная составляющая текущих затрат, в которую входят амортизационные отчисления и проценты на капитал. Критерий выбора — минимум текущих затрат.

При сравнении двух инвестиционных проектов из уравнения $X_{кр} \cdot C^1 + З_к^1 = X_{кр} \cdot C^2 + З_к^2$ сначала определяется объем произведенной продукции, при котором текущие затраты по сравниваемым проектам равны

$$X_{кр} = \frac{З_к^2 - З_к^1}{C^1 - C^2} ,$$

где $X_{кр}$ — объем продукции, при которой текущие затраты равны; C^1 , C^2 — удельные производственные затраты на единицу продукции по каждому из проектов.

Расчет этой точки позволяет определить, при каких объемах реализации предпочтительнее тот или иной проект по критерию минимума затрат. Для иллюстрации приведем следующий график:



Если объем продукции меньше $X_{кр}$, то выгоднее использовать первый вариант, если объем продукции больше $X_{кр}$ — второй вариант.

К недостаткам этого метода следует отнести условие равенства цен на продукцию в рассматриваемых вариантах.

Метод чистой прибыли. Чистая прибыль определяется по формуле

$$\Pi X - CX - Z_k,$$

где Π — цена за единицу продукции; X — объем продукции; C — стоимость продукции; Z_k — капитальные затраты.

Критерий метода чистой прибыли состоит в получении максимальной прибыли. Аналогично предыдущему методу, сначала из условия равенства чистой прибыли по рассматриваемым вариантам при одинаковом выпуске продукции, описываемого следующим уравнением:

$$\Pi^1 X_{кр} - C^1 X_{кр} - Z_k^1 = \Pi^2 X_{кр} - C^2 X_{кр} - Z_k^2,$$

определяется пороговый уровень $X_{кр}$:

$$X_{кр} = \frac{Z_k^1 - Z_k^2}{(\Pi^1 - \Pi^2) - (C^1 - C^2)}.$$

Далее, исходя из объема продукции, определяется проект, приносящий максимально чистую прибыль.

Метод чистой прибыли основан на средних величинах, и его использование эффективно, когда прибыль получена за счет данных инвестиций. Если проект инвестируется в разное время и разными инвесторами, то этот метод становится слишком громоздким.

Замечание. Результаты оценки методами текущих затрат и чистой прибыли могут не совпадать, так как метод чистой прибыли предполагает использование разных цен на продукцию.

Метод рентабельности. Метод основан на сравнении показателей рентабельности разных проектов. Критерием отбора является или максимальная рентабельность, или величина рентабельности, большая, чем величина, выбранная инвестором. Показатель рентабельности определяет величину чистой прибыли на один рубль инвестиций данного проекта и рассчитывается по формуле

$$\text{Рентабельность} = \frac{\text{Средняя прибыль}}{\text{Средний использованный капитал}} \cdot 100\%.$$

Показатель рентабельности отражает степень эффективности использования

инвестиционного капитала.

Метод срока окупаемости. Срок окупаемости определяется по формуле

$$T_{ок} = \frac{\text{Инвестируемый капитал}}{\text{Средняя прибыль}}.$$

Время окупаемости — это тот период времени, за которое инвестируемый капитал возвращается к инвестору за счет прибыли предприятия. Проект признается целесообразным, если срок окупаемости меньше или равен сроку, устанавливаемому инвестором. Лучшим признается проект, имеющий минимальный срок окупаемости.

Замечание. Недостаток метода состоит в том, что он ориентирован не на выгодность проекта, а на определение времени его ликвидности и не дает объективной оценки весомости проекта. Поэтому этот метод обычно используют вместе с другими.

Метод внутренней нормы. Пусть Π_t — прибыль от капитала, инвестированного в проект, которая может быть получена в год t , годовая процентная ставка — H , тогда общая сумма прибыли за время T , приведенная к начальному моменту времени, определяется по формуле

$$C = \sum_{t=0}^T \frac{\Pi_t}{(1+H)^t}.$$

Величина C может убывать или возрастать в зависимости от процентной ставки H . Следовательно, можно найти такую процентную ставку H , при которой $C = 0$. Процентная ставка, при которой $C = 0$, называется внутренней нормой прибыли проекта.

Если процентная ставка на инвестирование капитала больше внутренней нормы прибыли, то $C < 0$, и реализация проекта принесет убытки. Если же процентная ставка на инвестирование капитала ниже внутренней нормы прибыли, то $C > 0$, и реализация проекта дает прибыль.

Для расчета внутренней нормы прибыли при долгосрочных инвестициях используют следующий метод. Пусть Z — начальные затраты, а W — прибыль, которую получают ежегодно с момента реализации проекта. Тогда

$$C = -Z + W \cdot \sum_{t=0}^{\infty} (1+H)^{1-t} = -Z + \frac{W}{H}.$$

Отсюда при $C = 0$ $H = W/Z$.

Внутренняя норма прибыли сразу же показывает, какой из проектов должен быть отклонен на начальной стадии обсуждения.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие эти методы.

Пример 6.15. Пусть у вас имеется 1000 руб., которые можно инвестировать (вложить в дело). Проект предполагает, что через три года вы получите 2400 руб. Оценим этот проект с помощью внутренней нормы прибыли проекта. Поскольку проект краткосрочный, то норму внутренней прибыли определяют из формулы сложных процентов. В данном случае она составляет 32%, следовательно, выгоднее вложить деньги в проект, чем в банк. Если же вы хотите взять ссуду в банке под проект, а процент ссуды больше, чем 32, то этот проект невыгоден и должен быть отклонен.

Пример 6.16. Рассматриваются два проекта. В первом проекте удельные капитальные затраты на единицу продукции составляют 1500 руб., а во втором — 1000 руб. Удельные производственные затраты на единицу продукции в первом проекте составляют 25 руб., а во втором — 35 руб. Цена продукции в проектах предполагается одинаковой. Определим, какой из проектов выгоднее при выпуске 2000 единиц изделий.

Решение

Используем метод текущих затрат. Определим критический объем продукции. Из уравнения получаем, что $X_{кр} = 50$. Удельные производственные затраты на единицу продукции характеризуют угол наклона прямой затрат на графике. Чем меньше затраты, тем более пологий график. До точки пересечения ($X_{кр}$) предпочтительнее проект с большими производственными затратами, а после нее — с меньшими. Поэтому мы должны выбрать ($2000 > 50$) первый вариант.

Пример 6.17. Пусть в рамках предыдущего примера цена единицы продукции первого проекта 50 руб., а второго — 70 руб. Оценим проекты с помощью метода чистой прибыли.

Решение

Из уравнения получаем, что прибыльный порог ($X_{кр}$) в этом случае равен 50. В данном случае кривизну прямой затрат на графике характеризует прибыль на единицу продукции, т.е. величина ($\Pi - C$). Чем она меньше, тем график более пологий. До точки пересечения ($X_{кр}$) предпочтительнее проект с большей удельной прибылью, а после нее — с меньшей. Поэтому, как и в предыдущем примере, выбираем первый вариант.

Замечание. Из примеров ясно, что первый проект требует больших инвестиций. Может возникнуть желание за счет повышения цены единицы продукции быстрее окупить проект. Предлагаем читателям, изменяя цену единицы продукции первого проекта, вычислить предельную цену на изделие, при которой первый проект будет более привлекательным для инвестирования.

Пример 6.18. Рассматриваются два проекта. Первый предполагает инвестирование 2 млн. руб. в два года, и в первый год может дать прибыль 300 000 руб. Второй предполагает инвестирование 4 млн. руб. в три года, и первый год может дать прибыль 400 000 руб. Оценим их эффективность методами рентабельности и срока окупаемости.

Решение

Поскольку информации нам не хватает (мы не знаем среднюю прибыль), то при оценке вместо нее используем показатели за первый год эксплуатации.

Рентабельность первого проекта

$$\frac{300\,000}{1\,000\,000} \cdot 100\% = 30\%.$$

Рентабельность второго проекта

$$\frac{400\,000}{1\,333\,333} \cdot 100\% = 30\%.$$

Время окупаемости первого проекта

$$\frac{2\,000\,000}{300\,000} = 6,67 \text{ года.}$$

Время окупаемости второго проекта

$$\frac{4\,000\,000}{400\,000} = 10 \text{ лет.}$$

Следовательно, первый проект выгоднее.

6.3.2. Динамические методы оценок эффективности инвестиций

В настоящее время широкое распространение получили динамические методы оценок эффективности инвестиций. По оценкам американских специалистов, более 90% крупных фирм США и Японии используют эти методы при оценке инвестиций. Суть динамических методов состоит в их временном безразличии: денежные потоки с помощью процентных ставок приводятся либо к началу периода инвестирования, либо к его концу. В первом случае получаем метод чистой дисконтной стоимости, во втором — метод конечного финансового состояния.

В динамических методах главным операндом является поток платежей за период времени между выплатами процентных отчислений. Этот денежный поток, включающий в себя как платежи, так и поступления, называется *рентой*, или *аннуитетом*. Рента — это совокупность приходных и расходных статей баланса. Член денежного потока R_t для отрезка времени t определяется по формуле

$$R_t = (P_t - Z_t) - (P_t - Z_t - L_t) \cdot \alpha - K_t,$$

где P_t — объем продаж продукции в момент времени t ; Z_t — текущие затраты без амортизационных отчислений; L_t — расходы, не облагаемые налогами; α — налоговая ставка; K_t — инвестиционные расходы в период t .

Стоимость определенной суммы денег — это функция от времени возникновения денежных доходов или расходов. Рубль, полученный сегодня, стоит больше рубля, который будет получен в будущем. Если сегодня положить рубль в банк, то через год он принесет доход и, следовательно, будет больше рубля в будущем. Приведение денежных потоков к начальному или конечному времени инвестирования называется *дисконтированием*. Суть *дисконтирования* к первому году инвестиционного периода состоит в том, что будущий эф-

фekt, выраженный в стоимостной форме, представляется как сумма сегодняшнего дня и процент на нее, который мог бы быть получен, если бы эта сумма была использована в виде банковского капитала.

Дисконтирование проводится с помощью дисконтных коэффициентов, которые рассчитываются по формуле $q_t = (1 + \gamma)^{-t}$ для каждого денежного потока в период t . Если денежные потоки приводятся к последнему году инвестиционного периода, то дисконтные коэффициенты находятся по формуле $q_t = (1 + \gamma)^{T-t}$, где T — время окончания инвестиционного периода. При этом *инвестиционным периодом* называется период времени от начала вложения инвестиций до окончания эксплуатации объекта.

Метод чистой дисконтной стоимости (ЧДС). Чистая дисконтная стоимость определяется приведением членов денежного потока к началу инвестиционного периода и характеризует ожидаемый эффект с позиции сегодняшнего дня:

$$\text{ЧДС} = \sum_{t=0}^T ((P - Z_t) - (P_t - Z_t - L_t) \cdot \alpha - K_t) (1 + \gamma)^{-t}$$

или

$$\text{ЧДС} = \sum_{t=0}^T (P_t - Z'_t - K_t) (1 + \gamma)^{-t},$$

где Z'_t - все текущие расходы.

Критерий эффективности — наибольшая чистая дисконтная стоимость проекта. Если величина ЧДС положительна, то вложение инвестиций в данный проект оправданно. При сравнении нескольких проектов выбирается тот, у которого ЧДС максимальна.

Замечание. Изложенный метод применим в условиях полной определенности и отсутствия риска.

Метод конечного финансового состояния (КФС). Этот метод состоит в приведении денежных потоков на конец инвестиционного периода и характеризует ожидаемый эффект в конце срока инвестирования:

$$\text{КФС} = \sum_{t=0}^T ((P_t - Z_t) - (P_t - Z_t - L_t) \cdot \alpha - K_t) (1 + \gamma)^{T-t},$$

или

$$\text{КФС} = \sum_{t=0}^T (P_t - Z'_t - K_t)(1 + \gamma)^{T-t}.$$

Метод КФС требует выполнения следующих условий:

1. Каждая инвестиция имеет один счет доходов и один счет расходов.
2. Доходы дисконтируются с процентной ставкой доходов, а расходы — с процентной ставкой расходов.

Существуют различные модификации этого метода. Одной из таких модификаций является капитализированная рента, которая характеризуется одинаковой процентной ставкой на доходы и расходы.

Метод КФС предусматривает два варианта погашения инвестиционных кредитов.

1. Запрет уравнивания счетов

Этот вариант применяется при условии погашения инвестиционных кредитов в конце инвестиционного периода. В случае запрета уравнивания счетов полученные доходы заносятся на позитивный счет и дисконтируются с процентной ставкой H :

$$\text{КФС}_t^+ = D_t(1 + H)^{T-t}.$$

Расходы заносятся на негативный счет и дисконтируются с процентной ставкой H_1 :

$$\text{КФС}_t^- = N_t(1 + H_1)^{T-t}.$$

Конечное финансовое состояние проекта за весь инвестиционный период вычисляется по следующей формуле:

$$\text{КФС} = \sum_{t=0}^T (\text{КФС}_t^+ - \text{КФС}_t^-).$$

Критерием выбора является наибольшая величина КФС. Если при рассмотрении проекта величина КФС положительна, то вложение инвестиций в данный проект оправданно. При рассмотрении нескольких проектов сначала осуществляется их приведение к одинаковому инвестиционному периоду. При выборе

варианта с меньшим инвестиционным периодом в варианте с большим инвестиционным периодом следует учитывать ликвидную стоимость объекта, дисконтированную на год расчетов. При выборе варианта с большим инвестиционным периодом в варианте с меньшим инвестиционным периодом конечное финансовое состояние следует определять по последнему году большего периода.

2. Обязательное выравнивание счетов

Этот вариант применяется при ежегодном погашении инвестиционных кредитов либо за счет доходов, либо, в случае недостаточности доходов, за счет кредитов. Формулы для расчета финансового состояния на следующий год зависят от предыдущего финансового состояния и имеют следующий вид:

$$\text{если } \text{КФС}_{t-1} \geq 0, \text{ то } \text{КФС}_t = \text{КФС}_{t-1}(1+H) + (P_t - Z_t),$$

$$\text{если } \text{КФС}_{t-1} \leq 0, \text{ то } \text{КФС}_t = \text{КФС}_{t-1}(1+H) + (P_t - Z_t).$$

Так же как и при запрете выравнивания счетов, критерием выбора служит наибольшая величина КФС инвестиционного проекта.

Замечание. Метод конечного финансового состояния в этом виде также предполагает полную определенность информации и отсутствие риска.

Заметим, что при исследовании динамических моделей инвестирования применимы некоторые статические методы, модифицированные с учетом времени.

Метод динамического срока окупаемости. Под динамическим сроком окупаемости понимают ту часть инвестиционного периода, в течение которого окупается вложенный капитал и вместе с этим инвестор получает доход в размере процентной ставки.

Из определения следует, что динамический срок окупаемости находится в интервале $(T, T+1)$ при условии $\text{ЧДС}_T \leq 0, \text{ЧДС}_{T+1} \geq 0$.

Отсюда следует, что динамический срок окупаемости приближенно может быть найден по формуле линейной интерполяции

$$T_{ок} \approx T - \frac{\text{ЧДС}_T}{\text{ЧДС}_{T+1} - \text{ЧДС}_T}.$$

Метод внутренней процентной ставки. Внутренняя ставка, как мы помним, определяет минимальную величину доходности, при которой инвестор покрывает

вает свои расходы за инвестиционный период.

Внутренняя процентная ставка r находится итерационными методами из уравнения

$$\sum_{t=0}^T (P_t - Z_t - K_t) \cdot (1+r)^{-t} = 0.$$

Можно рассчитать внутреннюю процентную ставку и способом последовательных приближений. В этом случае находят два любых значения процентных ставок, при одном из которых $\text{ЧДС}_1 > 0$, а $\text{ЧДС}_2 < 0$. Ясно, что вторая процентная ставка будет больше первой (труднее отдать инвестированный капитал), и искомая внутренняя ставка будет находиться между ними. Приближенное значение внутренней процентной ставки можно найти по формуле

$$r = r_1 - \frac{\text{ЧДС}_1 \cdot (r_2 - r_1)}{\text{ЧДС}_2 - \text{ЧДС}_1}.$$

Полученное значение процентной ставки желательно проверить, вычислив ЧДС. Чем ближе ЧДС к нулю, тем точнее результат. Если отклонение от нуля большое, то выбирается интервал, на концах которого значения ЧДС имеют противоположные знаки, и процедура повторяется до достижения необходимой точности процентной ставки.

Поясним принципиальную идею инвестирования на простом примере.

Пример 6.19. Предположим, что величина капиталовложений в инвестицию 10000, а через год доход составит 12100.

Решение

При ставке дисконтирования 10% надо было бы вложить сейчас 11000, чтобы через год получить 12100. Разница 1000 — это чистая текущая стоимость инвестиции при условии отсутствии риска вложения.

Пример 6.20. Рассмотрим инвестиционный проект. Пусть период инвестирования составляет три года. Процентная ставка на доходы и расходы составляет 10 %. Требуемое вложение — 12000 в нулевой год. Чистый доход после первого года — 10000, после второго — 3000, после третьего — 2000.

Решение методом чистой дисконтной стоимости.

Найдем коэффициенты дисконтирования:

для нулевого года — это 1,0,

для первого года — $(1 + 0,1)^{-1} = 0,909$,

для второго — $(1 + 0,1)^{-2} = 0,826$,

для третьего — $(1 + 0,1)^{-3} = 0,751$.

Рассчитаем ЧДС:

$$\text{ЧДС} = -12000 \cdot 1,0 + 10000 \cdot 0,909 + 3000 \cdot 0,826 + 2000 \cdot 0,751 = 1070.$$

Так как чистая дисконтная стоимость положительна, то инвестиционный проект принесет больше, чем 10% годовых.

Заметим, что для расчетов удобнее свести все данные в таблицу.

Год	Денежный поток	Коэффициент дисконтирования	Дисконтный де- нежный поток
0	-12000	1,0	-12 000
1	10000	0,909	9 090
2	3000	0,826	2 478
3	2000	0,751	1 502
Сумма:			1 070

Решение методом конечного финансового состояния.

Рассчитаем коэффициенты дисконтирования, учитывая, что $T = 3$:

для нулевого года — это $(1 + 0,1)^3 = 1,331$,

для первого — $(1 + 0,1)^2 = 1,210$,

для второго — $(1 + 0,1)^1 = 1,100$,

для третьего — $(1 + 0,1)^0 = 1,000$.

Определим конечную финансовую стоимость:

$$\text{КФС} = -12000 \cdot 1,331 + 10000 \cdot 1,21 + 3000 \cdot 1,1 + 2000 \cdot 1,0 = 1428.$$

Так как значение КФС положительно, то этот проект выгоден. Разница в значениях ЧДС и КФС объясняется их приведением к разным годам. Нетрудно видеть, что $1070(1 + 0,1)^3 = 1428$.

Заметим, что расчет также удобнее проводить с помощью таблицы.

Год	Денежный поток	Коэффициент дисконтирования	Денежный дис- контный поток
0	- 12000	1,331	- 15 972
1	10000	1,210	12 100
2	3000	1,100	3 300
3	2000	1,000	2 000
	Сумма:		1 428

Решение методом динамического срока окупаемости

Для решения необходимо найти момент времени T , при котором ЧДС меняет свой знак с «+» на «-»:

$$\text{ЧДС}(0) = - 12000,$$

$$\text{ЧДС}(1) = - 12000 + 9090 = - 2910,$$

$$\text{ЧДС}(2) = - 12000 + 9090 + 2478 = -432.$$

$$\text{ЧДС}(3) = - 12000 + 9090 + 2478 + 1502 = 1070.$$

Подставляя в формулу, получаем

$$T_{ок} = 2 - \frac{\text{ЧДС}(2)}{\text{ЧДС}(3) - \text{ЧДС}(2)} = 2 - \frac{- 432}{1070 - (-432)} \cong 2,28 \text{ года.}$$

Проект окупается за время, меньшее, чем инвестиционный период. Следовательно, он выгоден.

Решение методом внутренней процентной ставки

При решении задачи оценки инвестиционного проекта нам необходимо найти ту процентную ставку, при которой ЧДС = 0. Мы уже знаем, что при ставке 10% ЧДС положительна. Возьмем процентную ставку 20% и рассчитаем при ней ЧДС проекта. Для удобства данные поместим в таблицу.

Год	Денежный поток	Дисконт. коэфф. (10%)	Дисконт- ный де- нежный поток	Дисконт. коэфф. (20%)	Дисконт. денежный поток
0	-12000	1,000	-12000	1,000	-12000
1	10000	0,909	9090	0,833	8330
2	3000	0,826	2478	0,694	2082
3	2000	0,751	1502	0,579	1158

Следовательно, ЧДС при ставке 10% равна 1070, а при ставке 20% она будет уже отрицательна и равна – 430.

Используя формулу вычисления внутренней процентной ставки, получаем

$$r = 0,1 - \frac{1070 \cdot (0,2 - 0,1)}{-430 - 1070} = 0,171.$$

Таким образом, внутренняя процентная ставка составляет 17,1%. Поэтому любое заимствование капитала под процент меньше, чем внутренняя процентная ставка, выгодно.

Пример 6.21. Рассмотрим инвестиционный проект. Пусть период инвестирования составляет три года. Процентная ставка на доходы составляет 10 %, а на расходы — 15%. Требуемое вложение — 12000 в нулевой год. Чистый доход после первого года — 10000, после второго — 3000, после третьего — 2000.

Принято решение о запрете уравнивания счетов.

Решение

Для оценки эффективности рассматриваемого предложения методом конечного финансового состояния и удобства вычислений составим таблицу.

Год	Доходы	Дисконт. коэфф. (10%)	Дисконт. доходы	Расходы	Дисконт. коэфф. (15%)	Дисконт. расход
0				-12000	1,521	18250
1	10000	1,21	12100		1,323	
2	3000	1,100	3300		1,150	
3	2000	1,000	2000		1,000	

Складывая дисконтные доходы, получаем 17400, а дисконтные расходы за этот же период составят 18250. Следовательно, инвестиционный проект при этих условиях необходимо отклонить.

Оценим эффективность этого же проекта *при обязательном выравнивании счетов*.

После первого года инвестирования финансовое состояние будет иметь вид

$$КФС_1 = -12000(1+0,15) + 10000 = -3800.$$

После второго года инвестирования получаем

$$КФС_2 = -3800(1+0,15) + 3000 = -1370.$$

После третьего года имеем

$$КФС_3 = -1370(1 + 0,15) + 2000 = 424,5.$$

Следовательно, при обязательном уравнивании счетов этот инвестиционный проект выгоден.

Данные обычно сводят в таблицу.

Год	Денежный поток	КФС по годам
0	- 12000	- 12000
1	10000	- 3800
2	3000	- 1370
3	2000	424,5

Замечание. Следует ясно понимать, что помимо подобных расчетных методов оценки инвестиций необходимо учитывать и различные косвенные признаки, влияющие на принятие решений: систему налогообложения, оборот капитала, амортизационные отчисления, внешнее и внутреннее лимитирование финансовых ресурсов, экономическую политику государства, время инвестирования и т.п.

Примеры для самостоятельного решения

6.4.1. Рассматриваются 2 инвестиционных проекта продолжительностью 4 года.

А: Необходимые инвестиции составляют 2 000 руб.

Денежные притоки по годам составляют:

1-ый год – 900 руб.; 2-ой год – 1 000 руб.;

3-ий год – 1 000 руб.; 4-ый год – 1 500 руб.

Б: Необходимые инвестиции составляют 3 000 руб.

Денежные притоки по годам составляют:

1-ый год – 1 500 руб.; 2-ой год – 1 000 руб.;

3-ий год – 1 000 руб.; 4-ый год – 1 500 руб.

Найти ЧДС (9%), время окупаемости и внутреннюю процентную ставку проектов. Определится с выбором проекта на основании полученных данных.

6.4.2. Необходимые инвестиции составляют 4 000 руб.

А: Денежные притоки по годам составляют:

1-ый год – 1 500 руб.; 2-ой год – 1 700 руб.;

3-ий год – 2 100 руб. 4-ый год – 2 000 руб.

Б: Необходимые инвестиции составляют 8 000 руб.

Денежные притоки по годам составляют:

1-ый год – 2 500 руб.; 2-ой год – 2 700 руб.;

3-ий год – 5 000 руб. 4-ый год – 3 000 руб.

Найти ЧДС (9%), время окупаемости и внутреннюю процентную ставку проектов. Определится с выбором проекта на основании полученных данных.

6.4.3. Рассматриваются 2 инвестиционных проекта продолжительностью 4 года.

А: Необходимые инвестиции составляют 5 000 руб.

Денежные притоки по годам составляют:

1-ый год – 1 500 руб.; 2-ой год – 2 000 руб.;

3-ий год – 4 000 руб.; 4-ый год – 2 500 руб.

Б: Необходимые инвестиции составляют 3 000 руб.

Денежные притоки по годам составляют:

1-ый год – 1 500 руб.; 2-ой год – 1 500 руб.;

3-ий год – 1 000 руб.; 4-ый год – 2 000 руб.

Найти ЧДС (9%), время окупаемости и внутреннюю процентную ставку проектов. Определиться с выбором проекта на основании полученных данных.

6.4.4. Какой процент начисляет банк на вклад, если через 5 лет сумма вклада утраивается. Проценты с вклада не снимаются.

6.4.5. Какую сумму нужно положить в банк под 10% годовых, чтобы через 4 года на счету был 1 млн.руб.

6.4.6. Через сколько лет сумма, положенная в банк под 11% годовых, увеличится в 5 раз?

Литература

1. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа: учеб. пособие. СПб., 2002.
2. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Высшая математика: в 3 т. М., 2004.
3. Высшая математика для экономистов / под ред. Н. Ш. Кремера. М., 2004.
4. Высшая математика: курс лекций / В. И. Горелов, Т. Н. Ледащева, О. Л. Карелова, О. Н. Ледащева; под общ. ред. профессора В. И. Горелова. Химки: РМАТ, 2011.
5. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевников Т. Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. М., 1986.
6. *Демидович Б. П., Кудрявцев В. А.* Краткий курс высшей математики. 2001.
7. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов: учеб. пособие для студентов высш. техн. учеб. заведений / под ред. Б. П. Демидовича. М., 2001.
8. *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии. М., 1980.
9. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Задачи и примеры с решениями. М., 2002.
10. *Красс М. С., Чупрынов Б. П.* Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М., 2003.
11. *Минорский В. П.* Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для втузов. М., 2003.
12. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2 т. М., 1996.
13. Сборник задач по высшей математике для экономистов / под ред. В. И. Ермакова. М., 2003.
14. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. М., 2001.
15. *Шипачев В. С.* Высшая математика. М., 1998.
16. *Виленкин Н.Я., Потапов В.Г.* Задачник-практикум по теории вероятности с элементами комбинаторики и математической статистики. Просвещение. М., 1979.

